Die Lösung sowohl des Trouton-Noble Paradoxons als auch des Ehrenfeldschen Paradoxons mit Hilfe des (bislang in der Literatur unbekannten) relativistischen elektrischen Feldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung

Abstract: *Das Trouton-Noble Paradoxon und auch das Ehrenfeldsche Paradoxon werden mit Hilfe des relativistischen elektrischen Feldes einer gleichförmig und geradlinig bewegten elektrischen Ladung gelöst, das aus den Maxwellschen Gleichungen abgeleitet wird und gleich dem Vektorprodukt des von der Ladung erzeugten B-Magnetfelds und der Geschwindigkeit der Ladung ist. Als Konsequenz daraus ist die für gleichförmig und geradlinig bewegte Ladungen und Magnetfeldquellen aufgestellte Lorentz-Transformation zu modifizieren. Ähnliches gilt für das Gaußsche und das Ampere-Maxwellsche Gesetz, denn die Divergenz des relativistischen elektrischen Feldes ist von null verschieden, wobei die Feldlinien jedoch nicht in elektrischen Ladungen enden oder dort ihren Ursprung haben.*

1) Die Herleitung eines besonderen relativistischen elektrischen Feldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung aus den Maxwellschen Gesetzen

a) Für die Rotation des ein Vektorfeld darstellenden, scheinbar willkürlich gewählten Kreuzproduktes **B x v = -v x B** gilt nach den Regeln der Vektoranalysis:
(1)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\boldsymbol{B}} - (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}) - \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\boldsymbol{B}} - (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\boldsymbol{v}}$$

$$= [(\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_x)\vec{\boldsymbol{e}}_x + (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_y)\vec{\boldsymbol{e}}_y + (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_z)\vec{\boldsymbol{e}}_z] - [(\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\nabla}v_x)\vec{\boldsymbol{e}}_x + (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\nabla}v_y)\vec{\boldsymbol{e}}_y + (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\nabla}v_z)\vec{\boldsymbol{e}}_z]$$

Im ungestrichenen Koordinatensystem ist **v** die Geschwindigkeit, mit der sich die Quelle eines Magnetfelds geradlinig und gleichförmig fortbewegt.

Es ist gleichgültig, ob die Quelle des Magnetfelds ein Magnet oder eine im gestrichenen System bewegte elektrische Ladung ist.

Sowohl die Divergenz von **v** als auch die Divergenz von **B** ist jeweils null. Letzeres folgt aus einer der Maxwellschen Gleichungen, ersteres ergibt sich aus einem logischen Grund, denn wegen der Definition von **v** muss dieser Vektor überall im Raum derselbe sein. Die Divergenzlosigkeit von **B** ist die einzige Annahme, die bezüglich **B** aufgestellt wird.

Da der Gradient einer jeden Komponente der Geschwindigkeit **v** gleich null ist (die vektorielle Geschwindigkeit **v**, mit welcher die einzelnen Komponenten des Gradienten des **B**-Feldes multipliziert werden, ist an jedem Ort, für den das Magnetfeld und die Rotation des Kreuzproduktes bestimmt werden soll, dieselbe; folglich ist der Gradient jeder der drei Komponenten der Geschwindigkeit **v** jeweils null), vereinfacht sich die Gleichung zu:
(2)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\boldsymbol{B}} = (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_x)\vec{\boldsymbol{e}}_x + (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_y)\vec{\boldsymbol{e}}_y + (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_z)\vec{\boldsymbol{e}}_z$$

Die vor und hinter den Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke können aus rein geometrischen Gründen mit dem Ausdruck **-dB/dt** gleichgesetzt werden, sodass gilt (siehe auch A. Föppl, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, 3. Auflage 1907, § 33, Gl. 119, S. 117 und Gl. 116, S. 116):
(3)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_x)\vec{\boldsymbol{e}}_x + (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_y)\vec{\boldsymbol{e}}_y + (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_z)\vec{\boldsymbol{e}}_z = -\frac{\boldsymbol{\delta}\vec{\boldsymbol{B}}}{\delta t}$$

Begründung: Der Einfachheit stelle man sich vor, die Quelle des Magnetfelds und damit das Feldlinienbild bewege sich im ungestrichenen Koordinatensystem des Labors streng in positiver **x**-Richtung. Die **y**- und die **z**- Komponenten von **v** sind dann gleich null. Folglich gilt im ungestrichenen System des Labors nach (2):
(3a)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{v}})$$

$$= (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_x)\vec{\boldsymbol{e}}_x + (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_y)\vec{\boldsymbol{e}}_y + (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_z)\vec{\boldsymbol{e}}_z = (v_x\frac{\delta B_x}{\delta x} + v_y\frac{\delta B_x}{\delta y} + v_z\frac{\delta B_x}{\delta z})\vec{\boldsymbol{e}}_x + (v_x\frac{\delta B_y}{\delta x} + v_y\frac{\delta B_y}{\delta y} + v_z\frac{\delta B_y}{\delta z})\vec{\boldsymbol{e}}_y$$

$$+ (v_x\frac{\delta B_z}{\delta x} + v_y\frac{\delta B_z}{\delta y} + v_z\frac{\delta B_z}{\delta z})\vec{\boldsymbol{e}}_z = v_x\frac{\delta B_x}{\delta x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + v_x\frac{\delta B_y}{\delta x}\vec{\boldsymbol{e}}_y + v_x\frac{\delta B_z}{\delta x}\vec{\boldsymbol{e}}_z$$

$$= \frac{\delta x}{\delta t}\,\frac{\delta B_x}{\delta x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\delta x}{\delta t}\,\frac{\delta B_y}{\delta x}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\delta x}{\delta t}\,\frac{\delta B_z}{\delta x}\vec{\boldsymbol{e}}_z$$

$$= \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\,\frac{B_{x2}-B_{x1}}{x_2-x_1}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\,\frac{B_{y2}-B_{y1}}{x_2-x_1}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\,\frac{B_{z2}-B_{z1}}{x_2-x_1}\vec{\boldsymbol{e}}_z$$

$$= \frac{-(B_{x1}-B_{x2})}{t_2-t_1}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{-(B_{y1}-B_{y2})}{t_2-t_1}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{-(B_{z1}-B_{z2})}{t_2-t_1}\vec{\boldsymbol{e}}_z = \frac{-dB_x}{dt}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{-dB_y}{dt}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{-dB_z}{dt}\vec{\boldsymbol{e}}_z = -\frac{\boldsymbol{\delta}\vec{\boldsymbol{B}}}{\delta t}$$

Stellt man sich vor, $\mathbf{dB_x/dx}$ sei an einer betrachteten Stelle numerisch positiv (und verkörpere somit in einem $\mathbf{B_x}$,**x**-Koordinatensystem eine Linie mit positiver Steigung), so ist $\mathbf{B_{x2}}$ größer als $\mathbf{B_{x1}}$. An ein- und derselben Stelle nimmt die Stärke von $\mathbf{B_x}$ jedoch im Laufe der Zeit **dt** ab und nicht zu. Dem zeitlich späteren Endpunkt des Intervalls **dt** , nämlich dem Zeitpunkt $\mathbf{t_2}$, entspricht ein kleinerer Wert von $\mathbf{B_x}$, nämlich $\mathbf{B_{x1}}$, während dem zeitlich früheren Endpunkt des Intervalls **dt** , nämlich $\mathbf{t_1}$, ein größerer Wert von $\mathbf{B_x}$ entspricht.

Man beachte: Das Ergebnis des Produktes aus dem (im Beispielsfall) numerisch positiven $\mathbf{v_x}$ und dem (im Beispielsfall) numerisch positiven $\mathbf{dB_x/dx}$ muss eine numerisch positive Zahl sein. Ohne Hinzufügung des Faktors -1 zu dem mit diesem Produkt gleichgesetzten Quotienten $\mathbf{dB_x/dt}$ erhielte man für diesen Quotienten jedoch ein falsches Ergebnis, nämlich eine negative Zahl, denn $\mathbf{B_x}$ nimmt ja mit der Zeit ab. Entsprechendes gilt für die anderen Produkte (nämlich $\mathbf{v_x}$ $\mathbf{dB_y/dx}$ und $\mathbf{v_x}$ $\mathbf{dB_z/dx}$).

Wegen der Geltung des Faradayschen-Maxwellschen Induktionsgesetzes (erst jetzt kommt dieses Gesetz ins Spiel) kann die Gleichung (3) wie folgt formuliert werden:
(4)

$$-\frac{\delta \vec{B}}{\delta t} = \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) = \nabla \times \vec{E}_{total}$$

Daraus wiederum folgt:
(5)

$$\vec{E}_{total} = \vec{B} \times \vec{v} + \vec{\nabla} C = \vec{B} \times \vec{v} + \vec{E}^{\prime}_{abs}$$

Die Größe **C** stellt ein Skalarfeld unbekannten (orts- und zeitabhängigen) Betrages und unbekannten Vorzeichens dar. Tatsächlich kann **C** wohl nichts anderes als minus **phi**, nämlich nichts anderes als das elektrostatische Potential sein. Das elektrostatische Feld $\mathbf{E'_{abs}}$, d.h., der Gradient von **C**, wird absolutes elektrisches Feld genannt, da es auch für einen mitbewegten Beobachter existiert. Da die Rotation dieses qualitativ absoluten Feldes null sein muss, ein lorentzkontrahiertes elektrostatisches Feld jedoch nicht wirbelfrei ist (siehe unten), muss es sich bei dem absoluten Feld um das im gestrichenen Ruhesystem der Ladung anzutreffende Feld handeln, das ja zweifelsfrei wirbelfrei ist.

Eine Umstellung führt zu:
(6)

$$\vec{E}_{total} - \vec{\nabla} C = \vec{E}_{rel} = \vec{B} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

Zur Erläuterung: Da die Quelle des **B**-Feldes voraussetzungsgemäß entweder ein bewegter Magnet oder eine bewegte elektrische Ladung ist, ist es für die Gültigkeit der Gleichung $\mathbf{E_{rel}}$= **B x v** an sich egal, ob **B** von einem Magneten oder von einer bewegten elektrischen Ladung erzeugt wird. Im Folgenden soll jedoch angenommen werden, das **B**-Magnetfeld sei von einer bewegten elektrischen Ladung erzeugt worden. Die Differenz zwischen dem elektrischen Gesamtfeld und dem elektrostatischen Feld kann angesichts des Fehlens von beschleunigten Ladungen und damit des Fehlens eines induktiven elektrischen Feldes $\mathbf{E_{ind}}$ nur eine besondere Art eines elektrischen Feldes sein. Dieses Feld wird relativistisches elektrisches Feld $\mathbf{E_{rel}}$ genannt, da es für einen Beobachter, der sich zusammen mit der Ladung bewegt, nicht existiert.

Man beachte: Das elektrische Feld **E**$_{rel}$ besitzt Quellen und Senken; diese liegen aber nicht in elektrischen Ladungen, sondern im leeren Raum! Denn ist die Quelle des Magnetfelds eine geradlinig und gleichförmig bewegte elektrische Ladung, so besitzt das **B**-Magnetfeld bekanntlich die Gestalt von Linien, die um die Flugbahn der Ladung kreisen. Die Linien des relativistischen elektrischen Feldes sind gemäß (6) sowohl dazu als auch im Verhältnis zur Flugbahn senkrecht ausgerichtet. Betrachtet man eine Momentaufnahme, so enden oder beginnen diejenigen Linien des relativistischen elektrischen Feldes, die vor und hinter der Ladung existieren, in der Nähe zur Flugbahn im Nichts und nicht etwa in der Ladung.

b) Aber auch das relativistische **B**-Feld der bewegten elektrischen Ladung kann – ganz ohne Benutzung der Lorentz-Transformation – seinerseits als Funktion des qualitativ absoluten (elektrostatischen) Feldes der bewegten Ladung und deren Geschwindigkeit dargestellt werden. Denn – ähnlich wie bei der oben betrachteten Rotation von **B x v** – gilt aus Gründen der Vektoranalysis und der Geometrie:
(7)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E}_{abs}) = (\vec{E}_{abs} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}_{abs} + \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{abs}) - \vec{E}_{abs}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

$$= (\vec{E}_{abs} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}_{abs}$$

$$= [(\vec{E}_{abs} \cdot \vec{\nabla}v_x)\vec{e}_x + (\vec{E}_{abs} \cdot \vec{\nabla}v_y)\vec{e}_y + (\vec{E}_{abs} \cdot \vec{\nabla}v_z)\vec{e}_z] - [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}E_x)\vec{e}_x + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}E_y)\vec{e}_y + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}E_z)\vec{e}_z]$$

$$= -[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}E_x)\vec{e}_x + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}E_y)\vec{e}_y + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}E_z)\vec{e}_z] = -(v_x\frac{\delta E_x}{\delta x} + v_y\frac{\delta E_x}{\delta y} + v_z\frac{\delta E_x}{\delta z})\vec{e}_x - (v_x\frac{\delta E_y}{\delta x} + v_y\frac{\delta E_y}{\delta y} + v_z\frac{\delta E_y}{\delta z})\vec{e}_y$$

$$-(v_x\frac{\delta E_z}{\delta x} + v_y\frac{\delta E_z}{\delta y} + v_z\frac{\delta E_z}{\delta z})\vec{e}_z = -v_x\frac{\delta E_x}{\delta x}\vec{e}_x - v_x\frac{\delta E_y}{\delta x}\vec{e}_y - v_x\frac{\delta E_z}{\delta x}\vec{e}_z = -\frac{\delta x}{\delta t}\,\frac{\delta E_x}{\delta x}\vec{e}_x - \frac{\delta x}{\delta t}\,\frac{\delta E_y}{\delta x}\vec{e}_y - \frac{\delta x}{\delta t}\,\frac{\delta E_z}{\delta x}\vec{e}_z$$

$$= -\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\,\frac{E_{x2} - E_{x1}}{x_2 - x_1}\vec{e}_x - \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\,\frac{E_{y2} - E_{y1}}{x_2 - x_1}\vec{e}_y - \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\,\frac{E_{z2} - E_{z1}}{x_2 - x_1}\vec{e}_z$$

$$= -\frac{-(E_{x1} - E_{x2})}{t_2 - t_1}\vec{e}_x - \frac{-(E_{y1} - E_{y2})}{t_2 - t_1}\vec{e}_y - \frac{-(E_{z1} - E_{z2})}{t_2 - t_1}\vec{e}_z = \frac{dE_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dE_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dE_z}{dt}\vec{e}_z = \frac{\delta \vec{E}_{abs}}{\delta t}$$

Zur Erläuterung: An den betrachteten Orten, für welche die Rotation des Vektorprodukts bestimmt werden soll, existieren keine Quellen oder Senken des qualitativ absoluten, in beiden Ruhesystemen (dem gestrichenen und dem ungestrichenen) wahrgenommenen (und eben deshalb als absolut bezeichneten) Feldes $\mathbf{E}_{abs}$, sodass auch hier eine Vereinfachung der Gleichung vorgenommen werden kann. Zudem ist auch hier die Divergenz von **v** gleich null, so dass eine weitere Vereinfachung der Gleichung möglich ist.

Die Divergenzlosigkeit des qualitativ absoluten Feldes $\mathbf{E}_{abs}$ an allen Orten, an den sich keine Ladungen befinden, ist die einzige Annahme, die bezüglich dieses Feldes gemacht wird. Eben weil das oben beschriebene relativistische elektrische Feld $\mathbf{E}_{rel}$ aber sehr wohl Quellen und Senken an Orten besitzt, an denen sich keine Ladungen befinden, kann es hier nicht Bestandteil von $\mathbf{E}_{abs}$ sein.

Der Einfachheit halber wird weiterhin angenommen, die Bewegung der Feldquelle erfolge in positiver **x**-Richtung.

Es gilt also nach (7):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E}_{abs}) = \frac{\delta \vec{E}_{abs}}{\delta t}$$

Wegen des Ampere-Maxwellschen Gesetzes kann diese Gleichung – angesichts der Abwesenheit einer realen Stromdichte **j** an den betrachteten Orten – bei Erweiterung mit $\mathbf{1/c^2}$ auch wie folgt formuliert werden:
(8)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\delta \vec{E}_{abs}}{\delta t} = \vec{\nabla} \times \frac{(\vec{v} \times \vec{E}_{abs})}{c^2} = \vec{\nabla} \times \vec{B}_{total}$$

Daraus wiederum folgt:
(9)

$$\vec{B}_{total} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{abs}}{c^2} + \vec{\nabla} D = \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{abs}}{c^2} + \vec{B}'_{abs}$$

Die Größe **D** stellt ein Skalarfeld unbekannten (orts- und zeitabhängigen) Betrages und unbekannten Vorzeichens dar. Tatsächlich kann **D** nichts anderes als das von einem eventuell vorhandenen absoluten Magneten erzeugte skalare magnetische Potential sein. Deshalb ist der Gradient dieses Potentials nichts anderes als das qualitativ absolute, nämlich auch von einem mitbewegten Beobachter wahrgenommene Magnetfeld eines Magneten. Dessen Rotation muss im leeren Raum null sein (es handelt sich ja um den Gradienten eines Skalars, nämlich des magnetischen Potentials). Da ein lorentzkontrahiertes, qualitativ absolutes Magnetfeld jedoch nicht wirbelfrei ist, kann es sich nur um das im gestrichenen Ruhesystem des Magneten feststellbare Magnetfeld $\mathbf{B'}_{abs}$ handeln, dessen Rotation im leeren Raum zweifelsfrei null ist.

Man beachte: Da sich einerseits aus dem Ampere-Maxwellschen Gesetz bei Abwesenheit einer realen Stromdichte **j** die Beziehung

$$\nabla \cdot \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t} \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

ergibt (siehe dazu auch weiter unten), andererseits aber die Divergenz des relativistischen elektrischen Feldes $\mathbf{E}_{rel}$ von null verschieden und zudem zeitlich veränderlich sein kann, kann das relativistische elektrische Feld $\mathbf{E}_{rel}$ nicht im Feld **E** der Ampere-Maxwellschen Gleichung enthalten sein. Dort kann mit **E** vielmehr nur die Summe aus dem elektrostatischen, qualitativ absoluten elektrischen Feld $\mathbf{E}_{abs}$ und dem bei Beschleunigung von Ladungen auftretende induktive Feld $\mathbf{E}_{ind}$ gemeint sein. Dies ist bereits in (8) berücksichtigt worden, indem dort auf der linken Seite statt **E** das Feld $\mathbf{E}_{abs}$ eingesetzt wurde (ein induktives elektrisches Feld fehlt im hier betrachteten Fall einer gleichförmig und geradlinig bewegten Ladung).

Eine Umstellung von (9) führt zu:
(10)

$$\vec{B}_{total} - \vec{B}_{abs} = \vec{B}_{rel} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{abs}}{c^2} \approx \frac{\vec{v} \times q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}$$

Die Differenz zwischen dem totalen **B**-Feld und dem qualitativ absoluten **B**-Feld (oder dem Gradienten des Skalarfeldes **D**) soll relativistisches **B**-Feld genannt werden (in Übereinstimmung mit den bei der Lorentz-Transformation verwendeten Begriffen). Die ganz rechte Seite, in welcher $\mathbf{E}_{abs}$ durch **q/(4pi epsilon_0 r²)** ersetzt wurde, gibt das (für nicht relativistische Geschwindigkeiten gültige) Gesetz von Biot-Savart wieder. Man erhält dieses Gesetz somit als Ableitung aus dem Maxwell-Ampereschen Gesetz.

Eine Zusammenfassung der beiden erhaltenen Gleichungen (6) und (10) führt zu (bei Abwesenheit eines bewegten absoluten Magneten und bei Anwesenheit einer gleichförmig und geradlinig bewegten elektrischen Ladung):
(11)

$$\vec{E}_{rel} = -\vec{v} \times \vec{B}_{rel} = -\vec{v} \times \frac{(\vec{v} \times \vec{E}_{abs})}{c^2} = -\vec{v} \times k\frac{(\vec{v} \times \vec{E}'_{abs})}{c^2}$$

Bei relativistischen Geschwindigkeiten ist das absolute elektrische Feld lorentzkontrahiert ($\mathbf{E'}_{abs}$ stellt das elektrische Feld im Ruhesystem der bewegten Ladung dar; **k** ist der relativistische Korrekturfaktor, dessen Erforderlichkeit hier nicht begründet werden soll). Seine Quellen und Senken befinden sich aber – wie man zeigen kann – trotz der Lorentzkontraktion nach wie vor ausschließlich in Ladungen.

2) Das Trouton-Noble-Paradoxon und seine Lösung

a) Die physikalische Richtigkeit der Gleichungen (6) und (11) wird nicht zuletzt dadurch bewiesen, dass mit ihrer Hilfe die Lösung des Trouton-Noble-Paradoxons gelingt.

Bewegen sich zwei elektrisch mit gleichem Vorzeichen geladene Kugeln, die im ungestrichenen System ruhen, mit gleicher Geschwindigkeit geradlinig-gleichförmig im gestrichenen System des Beobachters parallel zur **x'**-Achse und liefern sich die beiden Kugeln dort ein Kopf-an-Kopf-Rennen, so wirkt auf die eine der beiden Kugeln im gestrichenen System des Beobachters nicht bloß die elektrostatische Abstoßungskraft, sondern auch noch eine entgegengesetzte Lorentzkraft, die dadurch entsteht, dass die zweite Kugel im gestrichenen System des Beobachters ein Magnetfeld erzeugt, durch das sich die erste Kugel bewegt. Der Absolutbetrag des Magnetfelds der anderen Kugel ist gleich $\mathbf{v'E_y'/c^2}$. Dann ist die gegen die elektrostatische Abstoßungskraft gerichtete spezifische Lorentzkraft (Kraft pro Ladungseinheit) gleich $\mathbf{v'^2E_y'/c^2}$.

Probleme ergeben sich allerdings (spätestens) dann, wenn man die Situation verändert und nunmehr annimmt, die erste Kugel besitze gegenüber der zweiten einen zeitlich konstanten Vorsprung. Genauer: Im gestrichenen Ruhesystem des Labors soll die Verbindungslinie der beiden Kugeln mit der **x'**-Achse einen Winkel von 45° bilden. Auf beide Kugeln wirkt nunmehr eine Lorentzkraft (die das Ergebnis der Existenz des Magnetfelds der jeweils anderen Kugel ist) streng parallel zur **y'**-Achse, also jeweils quer zur Bewegungsrichtung. Bei der einen Kugel weist die Lorentzkraft in die positive, bei der anderen in die negative **y'**-Richtung. Sind die beiden Kugeln in starrer Verbindung, so wirkt auf die Vorrichtung folglich ein Drehmoment. Im ungestrichenen Ruhesystem der Kugeln ist dieses Drehmoment jedoch nicht existent.

Dieses Paradoxon (das oftmals in komplizierteren Erscheinungsformen diskutiert wird, ohne dass dadurch das Wesen des Paradoxons verändert würde) wird gemeinhin Trouton-Noble-Paradoxon genannt und gilt bis heute als ungelöst (siehe dazu:J. Franklin, “The lack of rotation in the Trouton-Noble-Experiment”, European Journal of Physics, Band 27 – 2006 –, S. 1251-1256; *O.D. Jefimenko*, Journal of Physics A, Vol 32 -1999-, S. 3755-3762; *R.M. Mould*, Basic Relativity, New York 1996, Kapitel 1.6 and 6.4; S.A. *Teukolsky*, American Journal of Physics, Band 64 -1996-, pp. 1104-1109; *A.K. Singal,* American Journal of Physics, Band 61 -1993-, S. 428-433; *W. Butler*, American Journal of Physics, Band 36 -1968-, S. 936-941; *P.S. Epstein*, “Über relativistische Statik”, Annalen der Physik, Band 341 – 1911 – , S. 779ff; *M. Laue*, Annalen der Physik, Band 35 -1911-, S. 524-542; *H.A. Lorentz*, “Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light”, in: H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, H. Weyl, The Principle of Relativity, A Collection of Original Memoirs, Dover Publ. 1952, S. 29; *F.T. Trouton* and *H.R. Noble*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 202 -1903-, S. 165-181).

Wendet man hingegen (6) oder (11) an, so wird die Lorentzkraft durch die Wirkung des relativistischen elektrischen Feldes der jeweils anderen Kugel vollständig neutralisiert! Ein resultierendes Drehmoment kann somit im gestrichenen System nicht vorhanden sein.

b) Im Übrigen kann man – ohne das scheinbare Paradoxon zu beseitigen – ein Drehmoment vollständig aus der gedanklichen Versuchsanordnung entfernen, indem man die beiden

Kugeln ein Kopf-an-Kopf-Rennen vollziehen lässt. Die im System des Labors beobachtbare Lorentzkraft kann man bei unveränderter nichtrelativistischer Geschwindigkeit beliebig anwachsen lassen, indem man die Größe der beiden Ladungen beliebig vergrößert. Die Nettokraft, die auf jede einzelne Kugel wirkt, wäre dann – wenn man das relativistische elektrische Feld unberücksichtigt ließe – im Ruhesystem der Kugeln eine merklich andere als im Ruhesystem des Labors. Dies widerspräche aber dem klassischen Relativitätsprinzip. Denn Kräfte sind jedenfalls dann Erhaltungsgrößen, wenn die beiden zueinander gleichförmig und geradlinig bewegten Bezugssysteme eine Relativgeschwindigkeit besitzen, die beliebig weit von der Lichtgeschwindigkeit entfernt ist, d.h., beliebig nahe bei null liegt.

Auch hier kann das Paradoxon nur durch die Einführung des relativistischen elektrischen Feldes der geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung aufgelöst werden.

3) Das relativistische elektrische Feld der bewegten Ladung in der Darstellung der Lehrbücher

Bei relativistischen Geschwindigkeiten – und nur bei diesen – gelangt auch die herrschende Lehrbuchmeinung (*Georg Joos*, Lehrbuch der Theoretischen Physik, 15. Auflage 1989, 3. Buch, Kapitel XIII, § 4 , S. 399; *E. M. Purcell*, Berkeley Physics Course II, Electricity and Magnetism, New York 1965, Kapitel 5.6, S. 160, 161, Fig. 5.13) im Ergebnis zur Anerkennung eines relativistischen elektrischen Feldes $\mathbf{E'}_{\mathbf{rel}}$ einer gleichförmig und geradlinig bewegten elektrischen Ladung, die als ein Ergebnis der Lorentz-Kontraktion des elektrostatischen Feldes angesehen wird (siehe nur *J.D. Jackson*, Klassische Elektrodynamik, 4. Auflage 2006, S. 648: *"Die Komprimierung der Feldlinien in transversaler Richtung schließlich kann man als Folge der FitzGerald-Lorentz'schen Längenkontraktion betrachten*."). Das resultierende Gesamtfeld $\mathbf{E'}_{\mathbf{total}}$ wird zu Recht ausdrücklich als nichtkonservativ, d.h., als nicht wirbelfrei beschrieben (*E. M. Purcell*, Berkeley Physics Course II, Electricity and Magnetism, New York 1965, Kapitel 5.6, S. 161: *"Zudem handelt es sich um ein Feld, das durch keine stationäre Ladungsverteilung, wie auch immer sie beschaffen sein mag, hervorgebracht werden könnte. Denn in diesem Feld ist das Wegintegral von E' nicht über jeden geschlossenen Pfad null*." ; *G. Lehner*, Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker, 6. Auflage 2008, Kapitel 1.10, S. 31: "*Es sei an dieser Stelle noch bemerkt, dass das Feld einer bewegten Ladung nicht wirbelfrei ist*.").

Das im gestrichenen System des Labors vorhandene elektrostatische Gesamtfeld $\mathbf{E'}_{\mathbf{total}}$ der gleichförmig und geradlinig bewegten Ladung wird von der Lehrbuchmeinung (siehe nur H. *Daniel*, Physik, Band 2: Elektrodynamik, Relativistische Physik, 1997, Kapitel 4.5.1, S. 360, 361) wie folgt postuliert (das ungestrichene System ist nunmehr das Ruhesystem der Ladung):
(12)

$$\vec{E}'_{total} = E_x\,\vec{e}_x + k\,E_y\,\vec{e}_y + k\,E_z\,\vec{e}_z$$

$$= [\,E_x\,\vec{e}_x + E_y\,\vec{e}_y + E_z\,\vec{e}_z\,] + [(k-1)\,E_y\,\vec{e}_y + (k-1)\,E_z\,\vec{e}_z] = \vec{E}_{abs} + \vec{E}'_{rel}$$

Wo das totale elektrische Feld $\mathbf{E'_{total}}$ der gleichförmig und geradlinig bewegten Ladung eine strenge **x'**-Richtung besitzt (z.B. an irgendeinem Punkt der geraden Bahn der betrachteten Punktladung), ist seine Stärke in beiden Ruhesystemen dieselbe.

In exakter Querrichtung wird das totale elektrische Feld in Gemäßheit der herkömmlichen Lorentz-Transformation und gemäß (12) mit $\mathbf{E'_{total} = E'_y = kE_y = kE_{abs}}$ postuliert.

Wie man in (12) leicht erkennt, ist das totale elektrische Feld $\mathbf{E'_{total}}$ der bewegten Ladung im gestrichenen Ruhesystem auch hier aus zwei Komponenten zusammengesetzt, nämlich zum einen aus der im gestrichenen System nicht direkt messbaren Größe $\mathbf{E_{abs}}$; diese entspricht derjenigen elektrischen Feldstärke, die im ungestrichenen System, wo die Ladung nicht in Bewegung ist, ständig an ein- und demselben ungestrichenen Ort gemessen werden würde. Zum anderen besteht das Feld $\mathbf{E'_{total}}$ aus $\mathbf{E'_{rel}}$, d.h., dem relativistischen elektrischen Feld der bewegten Ladung. Die zweite Komponente, d.h., das relativistische elektrische Feld $\mathbf{E'_{rel}}$ der bewegten Ladung, ist gemäß (12) gleich:
(13)

$$\vec{E}'_{rel} = (k - 1)\, E_y\, \vec{e}_y + (k - 1)\, E_z\, \vec{e}_z \quad (\textit{falsch!})$$

Diese Gleichung stimmt nicht mit (11) überein. Sie berücksichtigt nicht, dass ein relativistisches elektrisches Feld der bewegten Ladung nicht nur durch die Lorentzkontraktion erzeugt wird, sondern ein elementares Phänomen eigener Art darstellt (aus dem sich, wenn positive und negative Ladungen getrennt betrachtet werden, das bekannte relativistische elektrische Feld eines bewegten Magneten zusammensetzt).

Die Lehrbuchmeinung postuliert für die Stärke des relativistischen elektrischen Feldes der bewegten Ladung somit einen Wert, der (gemessen an Gl. 11) zu gering ist: In Querrichtung wird das relativistische elektrische Feld der bewegten Ladung nach (13) als $\mathbf{E'_{rel} = (k-1)E_{abs}}$ postuliert, während es nach (11) bei hohen Geschwindigkeiten (wenn $\mathbf{v^2/c^2}$ gegen eins geht) heißen muss:

$\mathbf{E'_{rel} = k\, E_{abs}}$.

Konsequenterweise weicht die in (12) wiedergegebene Lehrbuch-Darstellung des *totalen* elektrischen Feldes der gleichförmig und geradlinig bewegten Ladung (also der Summe der beiden Komponenten $\mathbf{E'_{rel}}$ und $\mathbf{E_{abs}}$) ebenfalls von der auf Grundlage von (11) zu erstellenden Gleichung ab. Der auf Grundlage von (11) gewonnene, physikalisch korrekte Ausdruck des totalen elektrischen Feldes der geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung ist (hierbei ist **v'=-v**):
(14)

$$\vec{E}'_{total} = \vec{E}_{abs} + \vec{E}'_{rel} = \vec{E}_{abs} - \vec{v}' \times \vec{B}' = \vec{E}_{abs} - \vec{v}' \times (k\, \frac{\vec{v}' \times \vec{E}'_{abs}}{c^2})$$

$$= \vec{E}_{abs} + \vec{v} \times (\frac{\vec{v}' \times \vec{E}'_{abs}}{c^2}) = \vec{E}_{abs} - \vec{v} \times (k \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{abs}}{c^2})$$

Man beachte: Die ungestrichene Feldstärke $\mathbf{E}_{abs}$ ist, wie auch schon in der herkömmlichen Gleichung (12), nicht mit dem Faktor **k** zu versehen! Dies ergibt sich aus der oben hergeleiteten Gleichung:

$$\vec{E}'_{total} = \vec{B}' \times \vec{v}' + \vec{\nabla} C' = \vec{B}' \times \vec{v}' + \boldsymbol{E}_{abs} = \vec{E}'_{rel} + \boldsymbol{E}_{abs}$$

Begründung: Die Größe **C'** stellte ein Skalarfeld unbekannten (orts- und zeitabhängigen) Betrages und unbekannten Vorzeichens dar. Tatsächlich kann **C'** nichts anderes als minus **phi**, nämlich nichts anderes als das elektrostatische Potential im ungestrichenen System sein (in welchem die elektrische Ladung ruht). Der Gradient dieses Potentials ist aber in jedem Fall notwendigerweise wirbelfrei; ein lorentz-kontrahiertes elektrostatisches Feld besitzt diese Eigenschaft jedoch nicht, denn es ist durchaus wirbelhaft (siehe oben).

In ausführlicher Schreibweise lautet die Gleichung (14):
(15)

$$\vec{E}'_{total} = \vec{E}_{abs} + \vec{E}'_{rel} = (E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z) + (k \frac{v^2}{c^2} E_y \vec{e}_y + k \frac{v^2}{c^2} E_z \vec{e}_z)$$

$$= E_x \vec{e}_x + (k \frac{v^2}{c^2} + 1) E_y \vec{e}_y + (k \frac{v^2}{c^2} + 1) E_z \vec{e}_z$$

Der in der herkömmlichen Lorentz-Transformation und in der ersten Zeile von (12) auftauchende Faktor **k** ist somit durch den Faktor **(kv^2/c^2+1)** zu ersetzen.

4) Die Lösung einer Abwandlung des Trouton-Noble-Paradoxons

Erst durch die Gleichungen (15) und (11) gelingt die Auflösung eine Abwandlung des Trouton-Noble-Paradoxons: Zwei gleich gebaute Kunststoffrohre, in welchem sich jeweils zwei mit Elektrizität desselben Vorzeichens geladene Kugeln befinden sollen, seien so beschaffen, dass die eine Kugel jeweils fest mit dem Rohr verbunden ist, während die andere Kugel sich frei im Rohr bewegen kann. Beide Rohre seien quer zur **x'**-Achse, nämlich in **y'**-Richtung, ausgerichtet und sollen im gestrichenen System des Labors geradlinig-gleichförmig mit entgegengesetzt-gleichen Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit parallel zur **x'**-Achse, also in positiver oder negativer **x'**-Richtung, bewegt werden.

Im gestrichenen System des Labors soll sich zudem entlang der **x'**-Achse eine dort ruhende Wand befinden, die in Richtung ihrer beiden Flächennormalen, nämlich in **y'**-Richtung, verschoben werden kann. Die beweglichen Kugeln der beiden genannten Rohre sollen, wenn sie sich in der Nähe des jeweiligen Rohrendes aufhalten, reibungsfrei an der Wand entlangschleifen können. Die Kugel des einen Rohres soll dabei an der einen Seite der Wand, die des anderen Rohres an der anderen Seite der Wand entlangschleifen.

Versetzt man sich in das Ruhesystem eines der beiden Rohre und nähme man an, dass in dem anderen (zweiten) Rohr die auf die dortige bewegliche Kugel ausgeübte Querkraft (Druckkraft) aufgrund der Geschwindigkeit, die das andere (zweite) Rohr im Ruhesystem des ersten Rohres besitzt, größer oder kleiner als die auf die eigene bewegliche Kugel wirkende Kraft ist (die der Einfachheit halber 1 N betragen soll), so müsste sich die Wand verschieben wollen. Nimmt man z.B. an, die große Geschwindigkeit würde zu einer *Verringerung* der Querkraft führen, so müsste sich, im Ruhesystem des ersten Rohres betrachtet, die Wand weg vom Ende des eigenen Rohres verschieben wollen. Wenn das Relativitätsprinzip Gültigkeit besitzen soll, so müsste im Ruhesystem des anderen (zweiten) Rohres jedoch dasselbe gelten; d.h., im Ruhesystem des anderen (zweiten) Rohres müsste sich die Wand dann genau in der entgegengesetzten Richtung verschieben wollen.

Die Wand kann sich aber nur in einer der beiden Richtungen verschieben wollen. Anders als bei der relativistischen Längenkontraktion und Zeitdilatation könnten Beobachter in beiden Systemen hier nicht gleichartige Beobachtungen machen.

Das Relativitätsprinzip verlangt somit, dass die Querkraft, die aus Sicht eines der beiden Ruhesysteme auf die bewegliche Kugel des anderen Rohres wirkt, genauso groß ist wie die Querkraft, die auf die eigene bewegliche Kugel wirkt. Damit verlangt das Relativitätsprinzip gleichzeitig, dass die Kraft, die auf ein- und dieselbe Kugel wirkt (sei es die bewegliche Kugel im ersten oder im zweiten Rohr), in beiden Systemen gleich groß (1 N) gemessen wird.

Eben dies wird durch Gl. (15) gewährleistet. Denn aus (15) und (11) ergibt sich:
(16)

$$F_y^{/} = qE^{/}_{total_y} + F^{/}_{lorentz} = qE_y + qE^{/}_{y_{rel}} + F^{/}_{lorentz}$$

$$= q(E_y + E^{/}_{y_{rel}} - k\,\frac{E_y}{c^2}\,v^2) = q(E_y + k\,\frac{E_y}{c^2}\,v^2 - k\,\frac{E_y}{c^2}\,v^2) = qE_y = F_y$$

Die auf die Wand ausgeübte Kraft ist somit in beiden System gleich! Dadurch wird das Relativitätsprinzip gerettet.

(Man beachte allerdings: Hierdurch ist keineswegs impliziert, dass die Kraft in der Speziellen Relativitätstheorie überall und immer eine Erhaltungsgröße darstellt.)

5) Das relativistische elektrische Feld einer gleichförmig und geradlinig bewegten Ladung in den Maxwellschen Gleichungen

Die Übereinstimmung der Gleichungen (6) und (11) mit den Maxwellschen Gleichungen ist bereits oben festgestellt worden. Dennoch soll das Verhältnis zwischen dem relativistischen elektrischen Feld und den Maxwellschen Gleichungen im Folgenden noch weiter vertieft werden.

5.1) Die Wirbelfreiheit des Gradienten des elektrostatischen Potentials nach den Maxwellschen Gesetzen

a) *R.P. Feynman* (Lectures on Physics II) leitet aus den Maxwellschen Gesetzes für das elektrische Feld der im gestrichenen System bewegten Ladung in zutreffender Weise die folgende Beziehung ab (aaO, Kapitel 21-3, S. 21-5, sämtliche Größen sind in den Feynmanschen Gleichungen ungestrichen und werden im Folgenden durch gestrichene Größen ersetzt; das ungestrichene System ist nach der hier benutzten Konvention dasjenige System, in welchem die Ladung ruht):
(17)

$$\vec{E}'_{total} = -\vec{\nabla}\varphi' - \frac{\delta\vec{A}'}{\delta t'}$$

Mit **phi'** ist das von der Ladung erzeugte Potential gemeint. Der Vektor **A'** ist das Vektorpotential. Dieses ist dadurch definiert, dass seine Rotation gleich dem **B'**-Magnetfeld ist (die Gleichung 17 findet sich bereits bei *J.C.Maxwell*, Treatise on Electricity and Magnetism, Band 2, Dover Publ. 1954, Abschnitt 599, S. 241, Gleichung 10, wo allerdings in nicht korrekter Weise auch noch die Lorentzkraft pro Ladungseinheit, nämlich das Vektorprodukt aus Geschwindigkeit der Probeladung und dem äußeren **B**-Magnetfeld, als Summand aufgeführt ist).

Man gelangt zu (17), indem man in der Faradayschen-Maxwellschen Induktionsgleichung
(18)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}'_{total} = -\frac{\delta\vec{B}'}{\delta t'}$$

die Größe **B** durch die Rotation einer anderen Größe, nämlich des Vektorpotentials **A**, ersetzt. Dann ergibt sich:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}'_{total} = -\frac{\delta(\vec{\nabla} \times \vec{A}')}{\delta t'}$$

Mit Hilfe des Schwarzschen Theorems der Austauschbarkeit der Reihenfolge von partiellen Differentiationen kann diese Gleichung wie folgt umgeschrieben werden:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}'_{total} = -\vec{\nabla} \times \frac{\delta\vec{A}'}{\delta t'} = \frac{-\delta(\vec{\nabla} \times \vec{A}')}{\delta t}$$

Daraus wiederum ergibt sich:

$$\vec{E}'_{total} = -\frac{\delta\vec{A}'}{\delta t'} + \vec{\nabla}C$$

Die Größe **C(x,y,z,t)** ist ein unbestimmtes Skalarfeld. Die Rotation des Gradienten eines jeden skalaren Feldes ist notwendigerweise null. Ersetzt man **C** durch das negative elektrostatische Potential einer Ladung, so gelangt man schließlich zu (17).

b) Der Schritt von (18) zu (17) ist aber nur berechtigt (dies sei betont), wenn die Rotation des Gradienten von **phi'**, d.h., die Rotation des elektrostatischen, von der (bewegten) Ladung erzeugten Feldes gleich null ist. Ist die Rotation des Gradienten von **phi'** von null verschieden, so ist (17) nicht gültig: Die Rotation beider Seiten von (17) würde dann zu einer Gleichung führen, die zu der Maxwellschen Grundgleichung (18) im Widerspruch stünde (indem auf der rechten Seite von Gl. 18 ein positiver oder negativer Summand hinzuzufügen wäre). Im Übrigen könnte man dann gar nicht von einem "Potential" sprechen, da ja die Arbeit, die bei Verbringung einer Probeladung zu einem weit entfernten Referenzpunkt aufzubringen wäre, vom gewählten Weg abhinge.

Ganz besonders deutlich wird dies, wenn die Maxwellsche Gleichung (18) mit Hilfe des Schwarzschen Theorems wie folgt umformuliert wird:
(19)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}'_{total} + \frac{\delta \vec{B}'}{\delta t'} = \vec{\nabla} \times \vec{E}'_{total} + \frac{\delta(\vec{\nabla} \times \vec{A}')}{\delta t'} = \vec{\nabla} \times (\vec{E}'_{total} + \frac{\delta \vec{A}'}{\delta t'}) = 0$$

Unter Heranziehung von Gleichung (17) verwandelt sich (19) in (siehe auch *R.P. Feynman*, Lectures on Physics II, Kapitel 18-6, Gleichung 18.17):
(20)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}'_{total} + \frac{\delta \vec{A}'}{\delta t'}) = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}\varphi') = 0$$

Mit anderen Worten: Die Rotation des Gradienten von **phi'** ist überall null.

Tatsächlich ist das durch die herkömmliche Lorentz-Transformation (für elektrische und magnetische Felder) beschriebene elektrische Feld einer mit relativistischer Geschwindigkeit bewegten Ladung nicht konservativ, d.h., seine Rotation ist aufgrund der Lorentzkontraktion des elektrischen Feldes keineswegs null. Bei diesem Feld kann es sich folglich nicht um den Gradienten des Potentials **phi'** handeln (siehe dazu erneut *E. M. Purcell*, Berkeley Physics Course II, Electricity and Magnetism, New York 1965, Kapitel 5.6, S. 161: *"Zudem handelt es sich um ein Feld, das durch keine stationäre Ladungsverteilung, wie auch immer sie beschaffen sein mag, hervorgebracht werden könnte. Denn in diesem Feld ist das Wegintegral von E' nicht über jeden geschlossenen Pfad null.*" ; *G. Lehner*, Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker, 6. Auflage 2008, Kapitel 1.10, S. 31: "*Es sei an dieser Stelle noch bemerkt, dass das Feld einer bewegten Ladung nicht wirbelfrei ist.*").

c) Aus all dem folgt: Die von der Kontraktion des elektrostatischen Feldes der gleichförmig und geradlinig bewegten Ladung verbirgt sich nicht im *ersten* Summanden auf der rechten Seite von Gl. (17), sondern im *zweiten* (d.h., im Ausdruck **dA'/dt'**). Dies wird bei der Herleitung der herkömmlichen Lorentz-Transformation (wie im Übrigen auch bei der

Herleitung des “retardierten Potentials”) nicht beachtet und führt zu einem falschen Ergebnis (siehe unten).

5.2) Das Vektorpotential

Bevor das Verhältnis von Gl. (11) zu den Maxwellschen Gesetzen noch weiter vertieft wird, soll zunächst das in Gleichung (17) aufgetauchte Vektorpotential näher betrachtet werden.

Ausgangspunkt für die Bestimmung des Vektorpotentials **A’** ist das Amperesche Gesetz in der Form der Maxwellschen Grundgleichung (worin **J’** die Volumenstromdichte darstellt):
(21)

$$c^2\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}}' = \frac{\vec{\boldsymbol{J}}'}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} + \frac{\delta\vec{\boldsymbol{E}}'}{\delta t'}$$

Definiert man das Vektorpotential **A’** in der bereits genannten Weise:
(22)

$$\vec{\boldsymbol{B}}' = \vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{A}}'$$

so kann (21) verwandelt werden in
(23)

$$c^2\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{A}}') = \frac{\vec{\boldsymbol{J}}'}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} + \frac{\delta\vec{\boldsymbol{E}}'}{\delta t'}$$

Legt man ferner fest:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}' = 0$$

so kann (23) seinerseits in
(24)

$$c^2\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{A}}') = c^2[\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}') - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{\boldsymbol{A}}'] = c^2(-\vec{\nabla} \cdot \nabla\vec{\boldsymbol{A}}') = \frac{\vec{\boldsymbol{J}}'}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} + \frac{\delta\vec{\boldsymbol{E}}'}{\delta t'}$$

verwandelt werden. Für die Divergenz des Gradienten des skalaren Betrags der **x’**-Komponente von **A** gilt:

$$c^2[-\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}A_x'] = \frac{J_x'}{\varepsilon_0} + \left(\frac{\delta E'}{\delta t'}\right)_x$$

Entsprechendes gilt für die Komponenten in **y’**- und **z’**-Richtung.

Man erkennt jetzt: Der Gradient des einzelnen skalaren Komponentenbetrags (**x**, **y** oder **z**) des Vektors **A’** verhält sich mathematisch wie der Gradient des skalaren elektrostatischen Potentials im elektrostatischen Analogfall, d.h., wie die elektrostatische Feldstärke **E’**. Denn ähnlich wie die Divergenz der elektrischen Feldstärke **E’**, d.h., die Divergenz des Gradienten des (skalaren) elektrostatischen Potentials, gemäß dem (in der Form einer der Maxwellschen Grundgleichungen ausgedrückten) Gaußschen Gesetz zur elektrostatischen (skalaren) Volumen-Ladungsdichte führt, führt die Divergenz des Gradienten des **x’**-Komponentenbetrags des Vektors **A’** zum Betrag der **x’**- Komponente der elektrischen Volumen-Stromdichte (unter Einschluss der Verschiebungsstromdichte **dE’/dt’**). Mehr noch: Ähnlich wie die Rotation des elektrostatischen Feldes, d.h., die Rotation des Gradienten des elektrostatischen Potentials, null ist, muss auch die Rotation des vektoriellen Gradienten der skalaren **x**-Komponente des Vektorpotentials null sein, da die Rotation eines jeden Gradienten null ist.

Umgekehrt kann man, wenn die Verteilung der Stromdichte im Raum bekannt ist, die Komponenten der Vektorgröße **A’** in ähnlicher Weise ermitteln, wie man – bei bekannter Verteilung elektrischer Ladung im Raum – das skalare Potential, d.h., die von einer Einheitsladung bei Verbringung (z.B.) in die Unendlichkeit aufzuwendende oder freigesetze Arbeit, bestimmen kann (nämlich mit Hilfe des Coulombschen Gesetzes). Eben aus diesem Grunde wird die Vektorgröße **A’** auch “Vektorpotential” genannt.

Genauer ausgedrückt gilt (der Index 1 bezeichnet den Ort, an dem das Vektorpotential bestimmt werden soll; der Index **k**, der von 2 bis zu der beliebig großen Zahl **n** läuft, bezeichnet das jeweilige differentielle Raumvolumen, in welchem ein Strom fließt):
(25)

$$\vec{A}'(1) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{V'} \frac{\dfrac{\vec{j}'(k)}{\varepsilon_0} + \dfrac{\delta \vec{E}'}{\delta t'}(k)}{r'_{1k}} \, dV' + \vec{K}' = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{V'} \frac{\dfrac{j'_x(k)}{\varepsilon_0} + \left(\dfrac{\delta E'}{\delta t'}\right)_x(k)}{r'_{1k}} \, \vec{e}_x \, dV'$$

$$+ \frac{1}{4\pi c^2} \int_{V'} \frac{\dfrac{j'_y(k)}{\varepsilon_0} + \left(\dfrac{\delta E'}{\delta t'}\right)_y(k)}{r'_{1k}} \, \vec{e}_y \, dV' + \frac{1}{4\pi c^2} \int_{V'} \frac{\dfrac{j'_z(k)}{\varepsilon_0} + \left(\dfrac{\delta E'}{\delta t'}\right)_z(k)}{r'_{1k}} \, \vec{e}_z \, dV' + \vec{K}'$$

K’(x’, y’, z’, t’) ist ein unbekannter vektorieller Teil des Vektorpotentials, dessen Rotation jeweils null ist. Demgegenüber bezeichnet das Integral denjenigen Anteil des Vektorpotentials, dessen Rotation nicht null ist.

5.3) Die Nichterfüllung der Eichbedingung div A = 0 bei Vorhandensein eines

relativistischen elektrischen Feldes einer gleichförmig und geradlinig bewegten elektrischen Ladung

Es soll nun der Frage nachgegangen werden, ob die als “Eichbedingung” bezeichnete Bedingung **div A=0** im Fall einer geradlinig und gleichförmig bewegten Punktladung **q** erfüllt ist.

a) Nach der Maxwell-Ampereschen Gleichung ist die Summe aus konventioneller Stromdichte **j** und der Verschiebungsstromdichte **dE/dt** nichts anderes als die Rotation der **B**-Magnetfeldstärke. Da die Divergenz einer Rotation immer null ist, so muss auch die Divergenz der Summe dieser beiden Stromdichten null sein. Das bedeutet: Fließt in ein unbewegliches Volumenelement mehr Ladung hinein als hinaus, so wird dieser Zufluss durch das geschlossene Oberflächenintegral der Größe **dE/dt** , genauer: durch die Divergenz des Verschiebungsstroms **dE/dt**, numerisch vollständig ausgeglichen. Umgekehrt gilt: Verändert sich bei einem unbeweglichen Volumenelement die Divergenz des Verschiebungsstroms **dE/dt**, so fließt reale Ladung in das Volumenelement hinein oder aus ihm heraus.

Wegen der Divergenzlosigkeit des Gesamtstroms (reale Stromdichte **j** plus Verschiebungsstromdichte **dE/dt**) gilt für die Divergenz des Vektorpotentials (der Ort 1 ist der Ort, für welchen das Vektorpotential **A** bestimmt werden soll; die Orte 2,3... **n** bezeichnen die Lage der Volumenelemente des Raumes, in denen Stromelemente vorhanden sind; die gestrichenen Größen bezeichnen das Bezugssystem des Labors, in dem Ladungen in Bewegung sind):
(26)

$$\nabla \cdot \vec{A}'(1) = \nabla \cdot \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\dfrac{\vec{j}'(2)}{\varepsilon_0} + \dfrac{\delta \vec{E}'}{\delta t'}(2)}{r'_{12}} \, dV'_2 + \nabla \cdot \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\dfrac{\vec{j}'(3)}{\varepsilon_0} + \dfrac{\delta \vec{E}'}{\delta t'}(3)}{r'_{13}} \, dV'_3 + \ldots$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2 r'_{12}} \nabla \cdot \left[\frac{\vec{j}'(2)}{\varepsilon_0} + \frac{\delta \vec{E}'}{\delta t'}(2)\right] dV'_2 + \frac{1}{4\pi c^2 r'_{13}} \nabla \cdot \left[\frac{\vec{j}'(3)}{\varepsilon_0} + \frac{\delta \vec{E}'}{\delta t'}(3)\right] dV'_3 + \ldots = 0$$

Man beachte: Die jeweilige Strecke $\mathbf{r'}_{12}$ bzw $\mathbf{r'}_{13}$ usw. wird, ausgehend vom Punkt 1, bei der Bildung der Divergenz ein klein wenig um den Betrag 1/2 **dx’** in positive **x’**-Richtung und anschließend um denselben Betrag in negative **x’**-Richtung parallelverschoben. Das im betrachteten, ein Stromelement enthaltenen Volumenelement liegende Ende der Strecke soll “oberes Streckenende”, das am Punkt 1 gelegene Ende der Strecke soll “unteres Streckenende” genannt werden. Ebenso wird diese Strecke im nächsten Schritt ein klein wenig um den Betrag 1/2 **dy’** in positive **y’**-Richtung und anschließend um denselben Betrag in negative **y’**-Richtung parallelverschoben (ausgehend vom Punkt 1). Entsprechendes geschieht schließlich noch in **z’**-Richtung. Bei jeder Parallelverschiebung wird die Differenz der jeweiligen **x’**, **y’** oder **z’**-Komponente des in der eckigen Klammer der unteren Zeile enthaltenen Vektors am oberen Ende der Strecke, d.h., in dem betreffenden Volumenelement, bestimmt. Division des jeweiligen Komponentenwertes durch den Skalar **r'**$_{12}$ bzw **r'**$_{13}$ usw. führt jeweils zum Betrag der **x'**-, **y'** bzw **z'**-Komponente des **A'**-Vektors am Ort 1. Eben dort soll ja die Divergenz eines Vektors bestimmt werden, und eben deshalb ist das untere Ende der Strecke – ausgehend vom Punkt 1 – jeweils um den Betrag 1/2 **dx'**, 1/2 **dy'** und 1/2 **dz'** in der jeweiligen Richtung zu verschieben. Die skalare Größe **r'** ist bei jedem Volumenelement jeweils eine Konstante und kann deshalb (wie in der zweiten Zeile geschehen) vor den Nabla-Operator gezogen werden.

Indem die Divergenz jedes einzelnen, jeweils in einer eckigen Klammer der zweiten Zeile enthaltenen Teilvektors als Konsequenz des Maxwell-Ampereschen Gesetzes null ist, ist die Gesamtsumme und damit die Divergenz von **A'** an jeder Stelle des Raumes null.

Ersetzt man im Fall einer bewegten einzelnen Ladung die Stromdichte **j'** durch die räumliche Ladungsdichte **rho** mal der Geschwindigkeit **v'**, so ändert sich an der Nulldivergenz des Vektorpotentials nichts. Vielmehr gilt:
(27)

$$\nabla \cdot \vec{A}'(1) = \nabla \cdot \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\dfrac{\rho\vec{v}'(2)}{\varepsilon_0} + \dfrac{\delta\vec{E}'}{\delta t'}(2)}{r'_{12}} dV'_2 + \nabla \cdot \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\dfrac{\rho\vec{v}'(3)}{\varepsilon_0} + \dfrac{\delta\vec{E}'}{\delta t'}(3)}{r'_{13}} dV'_3 + \ldots$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2 r'_{12}} \nabla \cdot [\frac{\rho\vec{v}'(2)}{\varepsilon_0} + \frac{\delta\vec{E}'}{\delta t'}(2)]\, dV'_2 + \frac{1}{4\pi c^2 r'_{13}} \nabla \cdot [\frac{\rho\vec{v}'(3)}{\varepsilon_0} + \frac{\delta\vec{E}'}{\delta t'}(3)]\, dV'_3 + \ldots = 0$$

Somit ist die Bedingung **div A'=0** erfüllt.

Anders ausgedrückt: Die Eichbedingung **div A'=0** ist nicht nur bei geschlossenen Leitungsströmen, sondern auch bei der Bewegung einer einzelnen elektrischen Ladung erfüllt. Allgemeiner formuliert: Die Eichbedingung **div A'=0** ist dann erfüllt, wenn das Prinzip der (aus dem Maxwell-Ampereschen Gesetz abgeleiteten) Divergenzlosigkeit des aus realem Strom und Verschiebungsstrom bestehenden Gesamtstroms Gültigkeit besitzt (siehe bereits A. Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität, 1. Auflage, Leipzig 1894, S. 405: "*Falls div* [des aus Leitungsstrom und Verschiebungsstrom bestehenden Gesamtstroms] *tau = 0 ist div A= 0.*").

b) Die Eichbedingung **div A'=0** ist allerdings dann nicht erfüllt, wenn das relativistische elektrische Feld der geradlinig und gleichförmig bewegten, einzelnen elektrischen Ladung ins Spiel kommt. Das bedeutet: Sie ist nur solange erfüllt, wie unter **E'** in (25) bis (27) allein das elektrostatische Feld der einzelnen Ladung verstanden wird (ein induktives, nämlich durch

Beschleunigung von Ladung entstandenes elektrisches Feld, das an sich ebenfalls Bestandteil von **E'** ist, existiert im hier betrachteten Fall voraussetzungsgemäß nicht). Denn wie oben festgestellt, besitzt das relativistische elektrische Feld Quellen und Senken im "Nichts" und unterliegt deshalb nicht dem Gaußschen Gesetz. Eben deshalb kann es ihm im Fall des Trouton-Noble-Paradoxons gelingen, die auf die mitbewegte zweite Punktladung wirkende Lorentzkraft, deren Feld ebenfalls nicht quellen- und senkenfrei ist, vollständig zu neutralisieren (auch die Lorentzkraft kann begrifflich ein Vektorfeld bilden, wenn die Kraftwirkung auf eine hypothetische, in bestimmter Weise bewegte Probeladung an verschiedenen Punkten des Raumes eine bestimmbare Größe und Richtung besitzt).

Konsequenz: Zur Bestimmung des relativistischen elektrischen Feldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung als Komponente des Vektors **dA'/dt'** ist die Eichbedingung **div A' = 0** nicht ohne das Risiko von Fehlern (Widersprüchen) verwendbar.

5.4) Die Notwendigkeit einer Präzisierung des Gaußschen-Maxwellschen Gesetzes und des Ampere-Maxwellschen Gesetzes

a) Es sei daran erinnert, dass die unmittelbar aus den Maxwell-Gleichungen ableitbare Gleichung (6) ein relativistisches elektrisches Feld einer geradlinig und gleichförmig bewegten Punktladung beschreiben, das quer zur Bewegungsrichtung orientiert ist. Vor und hinter der bewegten Punktladung müssen die Feldlinien im "Nichts" enden oder beginnen und können ihre Anfangs- oder Endpunkte nicht in der Ladung haben. Wenn elektrische Feldlinien zwar in einem Volumenelement enden oder beginnen, an diesen Endpunkten aber keine Ladungen anzutreffen sind, so ist die Divergenz der Summe aus realem Strom und Verschiebungsstrom **dE/dt** nicht null. Dann aber ist, wie die letzte Gleichung zeigt, auch die Divergenz von **A** nicht mehr null.

Folglich ist das Gaußsche-Maxwellsche Gesetz wie folgt zu präzisieren (das ungestrichene System ist jetzt wieder das Ruhesystem des Labors):
(28)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\boldsymbol{E}}_{total} - \vec{\boldsymbol{E}}_{rel}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_{abs} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_{v=0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Mit anderen Worten: Nur die Divergenz desjenigen elektrischen Feldes, dessen Quelle im System des Beobachters ruht (**v**=0), ist gleich der Raumladungsdichte geteilt durch die Dielektrizitätskonstante des Vakuums. Nur dieses Feld ist im Übrigen immer wirbelfrei und damit der Gradient des elektrostatischen Potentials (siehe oben).

b) Dann aber muss auch das Amperesche-Maxwellsche Gesetz in der differentiellen Form dahingehend modifiziert werden, dass unter der Verschiebungsstromdichte **dE/dt** die zeitliche Veränderung nicht des elektrischen Gesamtfeldes, sondern die des Gesamtfeldes abzüglich des relativistischen elektrischen Feldes verstanden wird. Denn das Gesetz behauptet ja, dass überall dort, wo die Divergenz der Vektorgröße **dE/dt** von null verschieden ist, eine Zunahme oder Abnahme von Ladung stattfindet. Dies trifft jedoch dort nicht zu, wo ein relativistisches elektrisches Feld einer geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung anzutreffen ist.

Genauer:

Aus der Ampere-Maxwellschen Gleichung:

$$c^2\,(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \frac{\vec{\boldsymbol{j}}}{\varepsilon_0} + \frac{\delta \vec{\boldsymbol{E}}}{\delta t}$$

und dem Umstand, dass die Divergenz einer Rotation immer null ist, folgt für Raumbereiche, in denen die reale Stromdichte **j** gleich null ist:

$$\nabla \cdot [c^2\,(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}})] = \nabla \cdot \frac{\delta \vec{\boldsymbol{E}}}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0$$

Bei einer geradlinig und gleichförmig bewegten Punktladung ist jedoch die Divergenz von $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$ (im System des Labors betrachtet) einerseits von null verschieden, anderseits zeitlich veränderlich. Deshalb kann das relativistische elektrische Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$ nicht Bestandteil des im Ampere-Maxwellschen Gesetzes erscheinenden **E** sein.

Es muss somit heißen (siehe auch bereits die Formulierung des Ampereschen-Maxwellschen Gesetzes in Gleichung 8):
(29)

$$c^2\,(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \frac{\vec{\boldsymbol{j}}}{\varepsilon_0} + \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{E}} - \vec{\boldsymbol{E}}_{rel})}{\delta t}$$

Dann nämlich gilt (wie dies angesichts der Divergenzlosigkeit einer jeden Rotation nicht anders sein darf):
(30)

$$\nabla \cdot c^2\,(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{j}}}{\varepsilon_0} + \nabla \cdot \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{E}} - \vec{\boldsymbol{E}}_{rel})}{\delta t} = \nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{j}}}{\varepsilon_0} + \frac{\delta}{\delta t} \nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{E}} - \vec{\boldsymbol{E}}_{rel}) = 0$$

(Man beachte: Das elektrische Feld einer im Vergleich betrachteten elektromagnetischen Welle stellt im Übrigen kein relativistisches Feld dar, vielmehr führen – in einer Momentaufnahme der Welle betrachtet – sämtliche elektrischen Feldlinien auf einem geknickten Weg zu elektrischen Ladungen.)

5.5) Die Widersprüchlichkeit der Lorenz-Eichbedingung

Die Verwendung der Lorenz-Eichbedingung – anstelle der Eichbedingung **div A = 0** – kommt für die Bestimmung des relativistischen elektrischen Feldes nicht in Betracht.

a) Wenn das Vektorpotential die als "Lorenz-Eichbedingung" bezeichnete Randbedingung
(31)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = -\frac{1}{c^2}\frac{\delta\varphi'}{\delta t}$$

erfüllt (das gestrichene System ist jetzt das Ruhesystem des Labors, während das ungestrichene System das Ruhesystem der Feldquelle ist), so verwandelt sich (24) in:
(32)

$$c^2\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}') = c^2[\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}') - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{A}'] = c^2(-\vec{\nabla}\frac{\delta\varphi'}{c^2\,\delta t'} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{A}') = \frac{\vec{J}'}{\varepsilon_0} + \frac{\delta\vec{E}'_{total}}{\delta t'}$$

Ersetzt man $\mathbf{E'}_{\mathbf{total}}$ in Gemäßheit der Gleichung (17), so verwandelt sich (32) in
(33)

$$c^2(-\vec{\nabla}\frac{\delta\varphi'}{c^2\,\delta t'} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{A}') = \frac{\vec{J}'}{\varepsilon_0} + \frac{\delta\vec{E}'_{total}}{\delta t'} = \frac{\vec{J}'}{\varepsilon_0} - \delta\,\frac{\vec{\nabla}\varphi'}{\delta t'} - \frac{\delta^2\vec{A}'}{\delta t'^2} = \frac{\vec{J}'}{\varepsilon_0} - \vec{\nabla}\frac{\delta\varphi'}{\delta t'} - \frac{\delta^2\vec{A}'}{\delta t'^2}$$

Eine Umformulierung führt schließlich zu:
(34)

$$c^2\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{A}' = c^2\nabla^2\vec{A}' = -\frac{\vec{j}'}{\varepsilon_0} + \frac{\delta^2\vec{A}'}{\delta t'^2}$$

und zu der Gleichung (siehe die explizite Rechnung bei Feynman, Lectures on Physics, Vol 2, Kapitel 18-6, Seite 18-10 bis 18-11, Gleichung 18-25):
(35)

$$\nabla^2\varphi' = \nabla \cdot \vec{\nabla}\varphi' = \nabla \cdot \vec{E}'_{abs} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2\varphi'}{\delta t^2}$$

Die letzte Gleichung steht aber im Widerspruch zum Gaußschen Gesetz (in der Form einer Maxwellschen Gleichung), da die zweite Ableitung des elektrostatischen Potentials nach der Zeit ja nicht notwendig null ist, aber null sein *müsste*, wenn das Gaußsche Gesetz gelten soll.

Konkret:

– Fliegt eine Punktladung in geradliniger und gleichförmiger Bewegung an einem Beobachter vorbei, so besitzt das vom elektrostatischen Feld der Punktladung erzeugte, numerisch negativ definierte Potential am Ort des Beobachters dann ein Minimum, wenn die Ladung genau scheinbar oder wirklich querab vom Beobachter ist. Unter "Potential" soll hier diejenige Arbeit pro Ladungseinheit verstanden werden, die aufzuwenden wäre, wenn man eine Probeladung entgegengesetzten Vorzeichens entlang einer (von der bewegten Punktladung erzeugten) elektrischen Feldlinie in die Unendlichkeit verschieben würde. Hierbei betrachte man eine Momentaufnahme des Feldlinienbildes; d.h., man friere das Feldlinienbild ein.

– Die erste Ableitung des Potentials nach der Zeit ist in diesem Moment an der Stelle, an der sich der Beobachter befindet, null. Denn das Potential war einen Moment früher größer, als es jetzt ist, und wird einen Moment später ebenfalls größer sein, als es jetzt ist.

Genauer:
(36)

$$\varphi(0,0,0,t) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 \; R(t)} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{y_0^2 + v^2 t^2}}$$

Zur Erläuterung: Ein Beobachter, für dessen Ort das Potential bestimmt werden soll, befinde sich im Zentrum eines rechtwinkligen **x,y,z**-Koordinatensystems. Die Punktladung **q** bewege sich gleichförmig und geradlinig mit der (nichtrelativistischen) Geschwindigkeit **v** auf einer parallel zur **x**-Achse verlaufenden Bahn, die von der **x**-Achse den Abstand $\mathbf{y_0}$ besitzt und in der von der **x**- und **y**-Achse aufgespannten Ebene liegt. Zum Zeitpunkt **t=0** kreuze die Punktladung die **y**-Achse.

Dann gilt:
(37)

$$\frac{d\varphi}{dt}(0,0,0,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{v^2 t}{(y_0^2 + v^2 t^2)^{3/2}}$$

Zum Zeitpunkt **t=0** gilt:
(38)

$$\frac{d\varphi}{dt}(0,0,0,0) = 0$$

Für die zweite Ableitung gilt:
(39)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(0,0,0,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{v^2}{(y_0^2 + v^2 t^2)^{3/2}} - \frac{3v^4 t^2}{(y_0^2 + v^2 t^2)^{5/2}}\right]$$

Die zweite Ableitung des Potentials nach der Zeit ist aber im Moment **t=0** nicht null, sondern ist gleich:

(40)

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta t^2}(0,0,0,0) = \frac{qv^2}{4\pi\varepsilon_0\, y_0^3} \neq 0$$

Die angegriffene Gleichung (35) behauptet demnach, dass die Divergenz der elektrischen Feldstärke querab von der bewegten Punktladung, also auch am Ort des Beobachters (wo keine Ladung, aber eine elektrostatische Feldstärke **E** existiert), von null verschieden sei. Das kann aber nach dem Gaußschen Gesetz nicht sein.

Tatsächlich besitzt das elektrische Gesamtfeld einer gleichförmig und geradlinig bewegten Punktladung wegen des Verhaltens des relativistischen elektrischen Feldes durchaus Quellen und Senken, die nicht in Ladungen liegen. Diese Quellen und Senken befinden sich jedoch zum Zeitpunkt **t=0** nicht im Bereich des Koordinatenursprungs, sondern außerhalb davon.

b) Die Widersprüchlichkeit der Lorentz-Eichbedingung lässt sich schließlich noch auf andere Weise zeigen. Da die Divergenz einer Rotation immer null sein muss, folgt aus dem Ampere-Maxwellschen Gesetz für den Fall, dass im betrachteten Volumenelement keine reale Stromdichte **j** anzutreffen ist (das ungestrichene System ist hier das Ruhesystem des Labors):
(41)

$$\nabla \cdot \frac{1}{c^2}(\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} = \nabla \cdot \frac{\delta}{\delta t}(-\nabla\varphi - \frac{\delta \vec{A}}{\delta t}) = \frac{\delta}{\delta t}[\nabla \cdot (-\nabla\varphi - \frac{\delta \vec{A}}{\delta t})] = \frac{\delta^2}{\delta t^2}(\nabla \cdot \vec{A}) = 0$$

Zur Erläuterung: Die Divergenz des negativen Gradienten von **phi**, d.h., des elektrostatischen Feldes, ist null, da im betrachteten Volumenelement keine Ladungen vorhanden sind. Im Ergebnis muss somit die zweite zeitliche Ableitung der Divergenz von **A** im Vakuum immer und überall null sein (unter der Voraussetzung des Fehlens eines relativistischen elektrischen Feldes $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$).

Indem die Lorentz-Eichbedingung die Divergenz von **A** nicht gleich null setzt, sondern für die Divergenz von **A** eine Größe postuliert, deren zweite Ableitung nach der Zeit (die proportional zur dritten Ableitung von **phi** nach der Zeit ist) nicht notwendig null ist, liegt eine Kollision mit dem Ampere-Maxwellschen Gesetz vor.

5.5) Zusammenfassung: Das relativistische elektrische Feld in den Maxwellschen Gleichungen

Das relativistische elektrische Feld ist Bestandteil des Feldes **-dA/dt**. Dies folgt bereits, daran sei erneut erinnert, aus der weiter oben im Zusammenhang mit der Ableitung der Grundgleichungen (6) und (11) entwickelten Gleichung, die für den Fall des Fehlens eines von ortsfesten, zeitlich veränderlichen Strömen erzeugten wirbelfreien, induktiven

elektrischen Feldes $\mathbf{E_{ind}}$ Gültigkeit besitzt, nämlich aus (das ungestrichene System ist das Ruhesystem des Labors):
(43)

$$\vec{E}_{total} = \vec{B} \times \vec{v} + \vec{\nabla} C = \vec{B} \times \vec{v} - \vec{\nabla}\varphi$$

Denn zusammen mit (17) ergibt sich daraus (beim Fehlen von $\mathbf{E_{ind}}$):
(44)

$$\frac{\delta \vec{A}}{\delta t} = \vec{B} \times \vec{v} = \vec{E}_{rel}$$

Es gilt also nach wie vor (17) in unveränderter Form, d.h., es gilt
(45)

$$\frac{-\delta \vec{A}}{\delta t} = \vec{E}_{total} - \vec{E}_{abs} = (\vec{E}_{abs} + \vec{E}_{ind} + \vec{E}_{rel}) - \vec{E}_{abs} = \vec{E}_{ind} + \vec{E}_{rel}$$

Gleichzeitig folgt aus (42):
(46)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_{total} - \vec{E}_{rel} - \vec{E}_{abs}) = \vec{\nabla} \cdot (-\frac{d\vec{A}}{dt} - \vec{E}_{rel}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{ind} = 0$$

Man beachte: Der Klammerausdruck in (46) ist nicht gleich **-dA/dt** , sondern ist gleich $\mathbf{E_{ind}}$.

Indem **-dA/dt** gleich $\mathbf{E_{total}\text{-}E_{abs} = E_{ind} + E_{rel}}$ ist, kann das **dA/dt**-Feld sowohl divergenzlos als auch “divergenzhaft” sein. Genauer: Es kann dann “divergenzhaft” sein, wenn das relativistische elektrische Feld von null verschieden ist.

Mit anderen Worten: Indem (46) formuliert werden kann als
(47)

$$\vec{\nabla} \cdot (-\frac{\delta \vec{A}}{\delta t} - \vec{E}_{rel}) = 0$$

ist die Divergenz von **dA/dt** immer dann null, wenn die Divergenz des relativistischen elektrischen Feldes null ist, und ist immer dann von null verschieden, wenn die Divergenz des relativistischen elektrischen Feldes von null verschieden ist.

Ferner ist (wie bereits erläutert) das Maxwellsche-Gaußsche Gesetz wie folgt zu präzisieren:
(48)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\boldsymbol{E}}_{total} - \vec{\boldsymbol{E}}_{rel}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_{abs} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_{v=0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Schließlich muss auch (wie ebenfalls bereits erläutert) das Maxwellsche-Amperesche Gesetz präzisiert werden:
(49)

$$\frac{1}{c^2} (\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \frac{\vec{\boldsymbol{j}}}{\varepsilon_0} + \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{E}} - \vec{\boldsymbol{E}}_{rel})}{\delta t}$$

Erst dann hat man ein widerspruchsfreies System von Gleichungen erhalten.

6) Die Lösung des Ehrenfestschen Paradoxons

Mit Hilfe von Gleichung (48) lässt sich das gleich zu beschreibende Ehrenfestsche Paradoxon auflösen.

Bewegt sich – im Ruhesystem des Labors betrachtet – ein sehr langer, gerader, einen Strom konstanter Stärke führender Draht mit konstanter Geschwindigkeit in seiner Längsrichtung, so existiert ein relativistisches elektrisches Feld, das quer zur Bewegungsrichtung des Drahtes und quer zu dessen **B**-Magnetfeldlinien ausgerichtet ist. Mit anderen Worten: Die relativistischen elektrischen Feldlinien sind – im Querschnitt des Drahtes und seiner Umgebung betrachtet – radial ausgerichtet und haben ihre Quellen oder (je nach Richtung des Drahtstroms oder der Drahtbewegung) Senken im Draht. Damit ist die Divergenz des elektrischen Feldes im Innern des Drahtes von null verschieden; ganz so, als wären im Innern des Drahtes plötzlich Ladungen eines einzelnen Vorzeichens aufgetaucht.

Biegt man den stromführenden Draht zu einem Kreis und versetzt man diesen Kreis in eine Rotation um seine Achse, so bleibt die Divergenz des relativistischen elektrischen Feldes im Innern des Drahtes an jeder Stelle erhalten.

Im ersten Moment mag alles dafür sprechen, die zeitliche Veränderung des Vektorpotentials als Ursache des relativistischen elektrischen Feldes auszuschließen und statt dessen die Lorentzkontraktion der Abstände der Ladungsträger, die bei den negativen Ladungsträgern wegen der unterschiedlichen Geschwindigkeit eine andere als bei den positiven Ladungsträgern sein könnte, als tiefere Ursache des relativistischen elektrischen Feldes anzusehen. Scheinbar ist die Gesamtladung des einen Vorzeichens insgesamt größer als die des anderen Vorzeichens geworden. Dies würde jedoch dem Satz der Erhaltung der Ladung widersprechen. Um den Satz der Erhaltung der Ladung zu retten, muss angenommen werden, dass die Lorentzkontraktion der tangentialen Abstände der Ladungen durch einen anderen relativistischen Effekt, der bei der Rotation auftritt, genau kompensiert wird.

Findet aber im Ergebnis gar keine Lorentzkontraktion der Abstände zwischen den Ladungen des gleichmäßig rotierenden, stromführenden Rings statt, so ist es auf der Grundlage der

Lehrbuchmeinung aber umso unerklärlicher, wieso die Ladung eines Vorzeichens eine höhere Dichte aufweist als die Ladung des anderes Vorzeichens.

Eine Auflösung des Paradoxons wird durch (48) geboten: Die Divergenz des relativistischen elektrischen Feldes kann ja von null verschieden sein, jedoch ist sie dann nicht gleich einer wirklichen elektrischen Ladungsdichte, sondern nur einer scheinbaren, denn an den Enden dieser elektrischen Feldlinien sitzen keine Ladungen; vielmehr enden oder beginnen die Feldlinien im Nichts. Das Gesetz der Erhaltung der elektrischen Ladung auf diese Weise deshalb gewahrt, und das Ehrenfestsche Paradoxon besteht nicht länger.

7) Der Analogfall des bekannten und aufgelösten Trouton-Noble-Paradoxons: Zwei Magnetpole, die sich im System eines Beobachters ein Kopf-an-Kopf-Rennen liefern

a) Das dargestellte Trouton-Noble-Paradoxon einschließlich seiner Erweiterung lässt sich auf zwei (gleichnamige) Magnetpole übertragen, die sich beide geradlinig-gleichförmig mit gleicher Geschwindigkeit im System des Labors parallel zur **x'**-Achse bewegen, wobei ein Magnetpol gegenüber dem anderen einen konstanten Vorsprung besitzen und die Verbindungslinie der beiden Pole mit der **x'**-Achse des Systems des Labors einen Winkel von 45° bilden soll. Man stelle sich vor, jeder dieser beiden Magnetpole werde jeweils von einem Ende eines langen Stabmagneten gebildet, so dass sich tatsächlich zwei lange Stabmagneten bewegen. Die anderen beiden Enden sollen weit voneinander entfernt sein, so dass die dort befindlichen Magnetpole praktisch keine Wirkung auf andere Pole ausüben.

Das magnetische Feld eines jeden der beiden Magnetpole erzeugt jedoch, da die Magnetpole bewegt werden, jeweils ein relativistisches elektrisches Feld. An dem Ort, an dem sich der andere Magnetpol momentan aufhält, weist dieses elektrische Feld in **z'**-Richtung. Indem sich der letztgenannte Magnetpol durch dieses elektrische Feld bewegt, erfährt er – im System des Labors – eine elektrische Lorentzkraft (siehe dazu oben) quer zur Bewegungsrichtung und zur Richtung des elektrisches Feldes. Die elektrische Lorentzkraft wirkt somit (bei passenden Vorzeichen) in positive **y'**-Richtung. Für den anderes Pol gilt Entsprechendes; allein mit dem Unterschied, dass die elektrische Lorentzkraft bei diesem in negative **y'**-Richtung wirkt. Auf die starre Verbindung der beiden Magnetpole wirkt somit ein Drehmoment, das jedoch im Ruhesystem der Magnetpole gar nicht existiert.

Auch hier gelingt die Lösung des Paradoxons nur dadurch, dass man die Existenz eines relativistischen Magnetfelds eines bewegten Magnetpols anerkennt – in völliger Analogie zu den Verhältnissen bei der bewegten elektrischen Ladung, wo man, neben dem elektrostatischen Feld, die Existenz eines relativistischen elektrischen Feldes einer bewegten Ladung anerkennen muss, wenn man das echte Trouton-Noble-Paradoxon lösen will. Durch das relativistische Magnetfeld eines bewegten Magnetpols wird die elektrische Lorentzkraft vollständig kompensiert.

Der Betrag des relativistischen Magnetfelds der bewegten Magnetfeldquelle ist demzufolge gleich $\mathbf{v'E'_{quer}/c^2 = v'^2B'_{quer}/c^2}$, wobei mit $\mathbf{E'_{quer}}$ die Querkomponente des relativistischen elektrischen Feldes des bewegten Magnetpols gemeint ist. Mit anderen Worten: Auch beim

Magnetfeld gibt es analog zu Gl. (6) und (11) ein relativistisches Zusatzfeld, nämlich (das gestrichene System ist das Ruhesystem des Labors):
(50)

$$\vec{B}'_{rel} = \frac{\vec{v}'}{c^2} \times \vec{E}'_{rel} = \frac{\vec{v}'}{c^2} \times (-\vec{v}' \times \vec{B}'_{abs})$$

Die Größe $\mathbf{B'}_{abs}$ kann durch $\mathbf{kB}_{abs}$ ersetzt werden.

b) Die Gleichung (50) kann, daran sei erinnert, direkt aus den Maxwellschen Gleichungen gewonnen werden. Denn danach gilt für das Magnetfeld des bewegten Magnetpols (siehe oben im Zusammenhang mit der Ableitung von Gleichung 11; ein absolutes elektrisches Feld existiert hier nicht, statt dessen ist das einzige existierende elektrische Feld ein relativistisches):
(51)

$$\vec{B}'_{total} - \vec{\nabla} D = \vec{B}'_{rel} = \frac{\vec{v}' \times \vec{E}'_{rel}}{c^2} = \frac{\vec{v}' \times (-\vec{v}' \times \vec{B}'_{abs})}{c^2} = \frac{-\vec{v}' \times (\vec{v}' \times \vec{B}'_{abs})}{c^2}$$

oder

$$\vec{B}'_{total} = \frac{\vec{v}' \times \vec{E}'_{rel}}{c^2} + \vec{\nabla} D = \frac{\vec{v}' \times \vec{E}'_{rel}}{c^2} + \vec{B}_{abs} = \frac{-\vec{v}' \times (\vec{v}' \times \vec{B}'_{abs})}{c^2} + \vec{B}_{abs} = \vec{B}'_{rel} + \vec{B}_{abs}$$

Existiert nicht nur ein bewegter absoluter Magnet, sondern auch eine bewegte elektrische Ladung, so gilt:
(52)

$$\vec{B}'_{total} = \frac{-\vec{v}' \times (\vec{v}' \times \vec{B}'_{abs})}{c^2} + \vec{E}'_{abs} \times \vec{v}' + \vec{B}_{abs} = \vec{B}'_{rel} + \vec{B}_{abs}$$

Hierbei besteht eine völlige Analogie zum elektrischen Feld der bewegten elektrischen Ladung und des bewegten absoluten Magneten. Die Größe **D** ist das skalare magnetische Potential und bildet das Gegenstück des im elektrischen Fall auftauchenden elektrostatischen Potentials **C**.

8) Die Notwendigkeit einer weiteren Modifizierung der Lorentz-Transformation

Vergleicht man die physikalisch korrekte Gleichung für das totale elektrische Feld der gleichförmig und geradlinig bewegten Ladung mit der herkömmlichen, aus der üblichen Form der Lorentz-Transformation abgeleiteten Gleichung (12), so zeigt sich, da ja (12) zur Verletzung des Relativitätsprinzips führt (wie das Trouton-Noble-Paradoxon zeigt), dass die Lorentz-Transformation einer Modifikation bedarf, um zusammen mit anderen Gleichungen der Elektrizitätslehre, die bei der Herleitung von (11) und bei der Lösung des Trouton-Noble-

Paradoxons benutzt wurden, ein widerspruchfreies System zu ergeben (die erste Modifikation wurde bekanntlich von Einstein im Jahre 1905 vorgenommen; die heute allgemein verwendete "Lorentz-Transformation" ist also streng genommen eine "Lorentz-Einstein-Transformation").

Das heißt: Will man das elektrische Feld (und auch das magnetische Feld) vom ungestrichenen System (in welchem die Quelle des absoluten elektrischen Feldes oder des absoluten magnetischen Feldes ruht) in das gestrichene System transformieren und dabei das relativistische elektrische Feld (und auch das relativistische Magnetfeld) einbeziehen, wie es einerseits als Ergebnis der Lorentzkontraktion des elektrostatischen und des magnetostatischen Feldes (nur dies wird in der üblichen Formulierung der Lorentz-Transformation berücksichtigt), andererseits als Phänomen eigener Art in Erscheinung tritt (dies wird in der üblichen Formulierung der Lorentz-Transformation *nicht* berücksichtigt), so muss die herkömmliche Lorentz-Transformation umgewandelt werden in (das ungestrichene System ist das System, in welchem die Feldquelle ruht):
(53)

$$B_x^{/} = B_x \qquad\qquad E_x^{/} = E_x$$

$$B_y^{/} = (k\frac{v^2}{c^2} + 1)B_y + k\frac{v}{c^2}E_z \qquad\qquad E_y^{/} = (k\frac{v^2}{c^2} + 1)E_y - kvB_z$$

$$B_z^{/} = (k\frac{v^2}{c^2} + 1)B_z - k\frac{v}{c^2}E_y \qquad\qquad E_z^{/} = (k\frac{v^2}{c^2} + 1)E_z + kvB_y$$

Das auf den rechten Seiten der Gleichungen auftauchende **B** ist das von einem absoluten Magneten erzeugte Magnetfeld; das dort auftauchende **E** ist das von einer Ladung erzeugte elektrostatische und damit qualitativ absolute Feld.

Erst nach dieser Modifikation ergibt die Lorentz-Transformation zusammen mit anderen anerkannten Gleichungen der Elektrizitätslehre und dem Relativitätsprinzip ein widerspruchsfreies System. Zudem folgt die richtige Lorentz-Transformation unmittelbar aus den Gleichungen (6), (11), (15),(52) und damit aus den Maxwellschen Gleichungen.

9) Die reguläre Lorentzkraft, die elektrische Lorentzkraft und eine dritte Lorentzkraft als perspektivische Kehrseiten der von der physikalisch korrekten Lorentztransformation beschriebenen Felder

a) Es sei daran erinnert, dass weder eine reguläre Lorentzkraft, die ja auf eine im gestrichenen System bewegte Probeladung wirkt, noch eine elektrische Lorentzkraft, die auf einen im gestrichenen System bewegten Probe-Magnetpol wirkt (siehe oben), von der korrigierten Lorentz-Transformation beschrieben wird. Vielmehr ist die reguläre Lorentzkraft die perspektivische Kehrseite der elektrischen Kraft, die im Ruhesystem der Probeladung von dem relativistischen elektrischen Feld der dort bewegten Magnetfeldquelle auf die Probeladung ausgeübt wird. In analoger Weise ist die elektrische Lorentzkraft die perspektivische Kehrseite der magnetischen Kraft, die im Ruhesystem des bewegten Probe-Magnetpols von dem relativistischen Magnetfeld der dort bewegten Quelle des elektrostatischen Feldes auf den Probe-Magnetpol ausgeübt wird.

b) Tatsächlich gibt es in diesem Zusammenhang noch eine dritte, bislang namenlose dritte Lorentzkraft: Ruht eine felderzeugende elektrische Ladung im System des Labors und bewegt sich eine elektrische Probeladung geradlinig und gleichförmig durch den Raum, so erfährt diese bewegte Probeladung neben der Kraft des absoluten elektrischen Feldes eine Zusatzkraft. Die Natur dieser Zusatzkraft erschließt sich ohne weiteres, wenn man sich in das Ruhesystem der Probeladung begibt. Dort wirkt auf die Probeladung eben nicht nur das absolute elektrostatische Feld, sondern auch noch ein von den Gleichungen (6) und (11) beschriebenes relativistisches elektrisches Feld der bewegten Quelle des elektrostatischen Feldes. Da sich diese auf die Probeladung wirkende Kraft auch im System des Labors bemerkbar macht, dort aber nicht die Kraft eines relativistischen elektrischen Feldes einer bewegten elektrischen Ladung sein kann (die felderzeugende elektrische Ladung befindet sich dort ja in Ruhe), muss ihr ein anderer Name gegen werden. Sie soll dritte Lorentzkraft genannt werden.

Experimentell kann diese dritte Lorentzkraft auch dadurch in Erscheinung treten, indem eine kurzgeschlossene, mit keiner Stromquelle verbundene Stabspule mit vielen Windungen in der Nähe einer ruhenden, mit Elektrizität eines einheitlichen Vorzeichens versehenden Kugel geradlinig und gleichförmig bewegt wird. Weil die dritte Lorentzkraft (ebenso wie das im System der Spule feststellbare, die perspektivische Kehrseite der dritten Lorentzkraft darstellende relativistische elektrische Feld der Kugel) nicht wirbelfrei ist, entsteht in der Spule ein kreisender elektrischer Strom.

10) Die (allerdings jeweils inkorrekte) Vorwegnahme der Modifikation der Lorentz-Transformation durch W. E. Weber, C.F. Gauss und G.F.B. Riemann

Die hier postulierte und aus den Maxwellschen Gleichungen abgeleitete Modifikation der Lorentztransformation ist von *Wilhelm Eduard Weber* (nach welchem die Einheit des magnetischen Flusses im SI-System benannt wurde) qualitativ vorweggenommen worden. Im Jahre 1846 (siehe *Wilhelm E. Weber*, "Über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung", in: Werke, Band 3, Erscheinungsjahr 1893, S. 25ff [157]) stellte er die (zuletzt noch im Jahre 1878 wiederholte) Behauptung auf, neben der vom elektrostatischen Feld einer geradlinig und gleichförmig bewegten Punktladung herrührenden (vom Coulomb-Gesetz beschriebenen) Kraftwirkung auf eine andere, nämlich ruhende Probeladung gebe es noch eine weitere Kraftwirkung dieser bewegten Punktladung auf die ruhende Probeladung, nämlich eine elektrodynamische. Bei einer gleichförmigen und geradlinigen Bewegung der felderzeugenden Punktladung wurde die auf eine ruhende Probeladung wirkende Zusatzkraft als proportional zum elektrostatischen Feld der bewegten Punktladung (am Ort der Probeladung) und zum Quadrat der Geschwindigkeit postuliert, mit der sich die bewegte Punktladung von der ruhenden entfernt.

Weber irrte sich allerdings zum einen bei der in seiner Gesetzesformulierung enthaltenen

Annahme, die bewegte Ladung würde auch dann eine zusätzliche Kraft auf die ruhende Ladung ausüben, wenn letztere in der Fluchtlinie der bewegten Ladung läge (*W. Weber*, aaO, S. 134/135). Damit zusammenhängend irrte er sich bei der weiteren Annahme, wonach die Zusatzkraft, die auf eine im Koordinatenursprung ruhende Ladung ausgeübt wird, null sei, wenn der Geschwindigkeitsvektor und der Ortsvektor der zweiten, nämlich bewegten Ladung einen rechten Winkel miteinander bilden (die für *Weber* maßgebliche differentielle Veränderung des Abstandes der beiden Ladungen mit der Zeit ist in dieser Situation gleich null).

J.C. Maxwell weist darauf hin (Treatise on Electricity and Magnetism, Band 2, Dover Publ. 1954, Abschnitt 851, S. 483), dass *C.F. Gauss* früher als *Weber*, nämlich bereits im Jahre 1835 – in einem allerdings wohl erst posthum veröffentlichten Beitrag – in ähnlicher Weise ein Grundgesetz der elektrischen Kraftwirkung postuliert hatte, wonach zwei elektrische, relativ zueinander bewegte Ladungen einander abstoßen oder anziehen, und zwar nicht in derselben Weise wie in einem Zustand der relativen Unbeweglichkeit.

Eine Modifizierung des Weberschen Grundgesetzes ("Riemanns Grundgesetz") wurde schließlich von *B. Riemann* vorgeschlagen (*B. Riemann*, Schwere, Elektricität und Magnetismus, 2. Auflage 1890, § 99, S. 327, Gl. 4, 5 und 6). Für den Fall, dass Geschwindigkeitsvektor und Ortsvektor der zweiten, d.h. der bewegten Ladung einen rechten Winkel miteinander bilden, ergibt sich aus dem Riemannschen Gesetz in an sich korrekter Weise eine Zusatzkraft, die proportional zur Stärke der von der bewegten Ladung erzeugten, im Koordinatenursprung (wo die erste Ladung ruht) wirksamen Coulombkraft und darüber hinaus proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit der bewegten Ladung in diesem Koordinatensystem ist. Allerdings stimmt die *Richtung* der postulierten Zusatzkraft nicht, denn diese wird im konkreten Fall als parallel zum Geschwindigkeitsvektor und nicht zum Ortsvektor angenommen (siehe dazu auch: *K. Simonyi*, Kulturgeschichte der Physik, 1. Auflage 1990, Kapitel 4.4.7, S. 339-340).

Andreas Trupp
andreas@andreastrupp.com

(29.02.2016; letztes Update: 18.08.2016)