Die Lösung des Trouton-Noble Paradoxons mit Hilfe einer korrigierten elektromagnetischen Lorentztransformation und der dadurch gelingende Nachweis magnetischer Monopole

Abstract: *Das Trouton-Noble Paradoxon wird mit Hilfe des gegenüber der herkömmlichen Lorentztransformation korrigierten relativistischen elektrischen Feldes einer gleichförmig und geradlinig bewegten elektrischen Ladung gelöst, das aus den Maxwellschen Gleichungen abgeleitet wird und gleich dem Vektorprodukt des von der Ladung erzeugten* ***B****-Magnetfelds und der Geschwindigkeit der Ladung ist. Seine* ***y****- und* ***z****- Komponenten sind somit nicht, wie jedoch allgemein angenommen,* ***(k-1)E****, sondern* ***kv²/c² E****. Insoweit ist die für gleichförmig und geradlinig bewegte Ladungen und Magnetfeldquellen aufgestellte Lorentztransformation in der von A. Einstein (1905) stammenden Fassung zu korrigieren. Diese basiert – durch die Gleichsetzung des im gestrichenen Ruhesystem des Labors anzutreffenden 4x4-Feldtensors* ***F'*** *mit dem Produkt aus dem im Ruhesystem der bewegten Feldquelle anzutreffenden ungestrichenen 4x4-Feldtensor* ***F*** *und der für räumliche Distanzen und zeitliche Abstände geltenden Lorentztransformations-Matrix* ***L*** *– u.a. auf der evident falschen Annahme, dass das von einem bewegten Magneten erzeugte elektrische Feld wirbelfrei sei. Die Korrektur führt zudem zu magnetischen Monopolen, die sich als die perspektivische Kehrseite der durchaus bekannten "elektrischen Lorentzkraft" wolkenartig um einen bewegten Magnetpol herum präsentieren und dem Gesamtbetrag nach gleich dem Produkt aus der gewöhnlichen "magnetischen Ladung" eines bewegten Magnetpols und dem Faktor* ***(1-k***$^{-1}$***)*** *sind. Schließlich nimmt – als weitere Konsequenz – die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante bei relativistischen Geschwindigkeiten zu.*

Inhalt:

0) Einführung

Das elektrische Feld einer geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung ist bei hinreichend großer Geschwindigkeit von dem elektrischen Feld einer ruhenden Ladung verschieden. Entsprechendes gilt für das magnetische Feld eines Magneten. Ferner erzeugt die geradlinige und gleichförmige Bewegung einer elektrischen Ladung ein Magnetfeld, das im Ruhesystem der elektrischen Ladung nicht existiert; und die geradlinig und gleichförmige Bewegung eines Magneten erzeugt ein besonderes, für die Elektrotechnik besonders bedeutsames elektrisches Feld, das im Ruhesystem des Magneten nicht existiert.

Die Beschreibung dieser Felder wird von der für elektrische und magnetische Felder gültigen Lorentztransformation geliefert, die 1905 von A. Einstein postuliert wurde.

Es hat sich gezeigt, dass diese von Einstein postulierte, für elektrische und magnetische Felder Gültigkeit beanspruchende Lorentztransformation zu Paradoxien führt. Als solches ist das Trouton-Noble-Paradoxon zu nennen.

In der vorliegenden Arbeit sollen Fehler der herkömmlichen, für elektrische und magnetische Felder Geltung beanspruchenden Lorentztransformation aufgedeckt werden. Dabei werden die Maxwellschen Gleichungen, die allgemeine, für zeitliche und räumliche Intervalle gültige Lorentztransformation und das allgemeine Relativitätsprinzip als Grundlagen benutzt. Mit anderen Worten: Die Spezielle Relativitätstheorie, die ja zum einen in der allgemeinen, nämlich für räumliche und zeitliche Intervalle gültigen Lorentztransformation, zum anderen in der damit äquivalenten Minkowski-Metrik ihren Ausdruck findet, wird nicht in Frage gestellt. Vielmehr geht es darum, die Spezielle Relativitätstheorie fehlerfrei auf bestimmte elektrische und magnetische Erscheinungen anzuwenden. Auf diese Weise werden die bestehenden Paradoxien beseitigt. Gleichzeitig wird der Nachweis magnetischer Monopole erbracht.

1) Die Herleitung eines besonderen (relativistischen) elektrischen Feldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten Quelle, sei diese ein (absoluter) Magnetpol oder eine elektrische Ladung, aus den Maxwellschen Gleichungen

1.1) Das relativistische elektrische Feld eines geradlinig und gleichförmig bewegten (absoluten) Magnetpols

Für die Rotation des ein Vektorfeld darstellenden Kreuzproduktes **B x v = -v x B** gilt nach den Regeln der Vektoranalysis (**B** und **v** sind zunächst beliebige Vektoren):
(1)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

$$= [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}B_x)\vec{e}_x + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}B_y)\vec{e}_y + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}B_z)\vec{e}_z] - [(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}v_x)\vec{e}_x + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}v_y)\vec{e}_y + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}v_z)\vec{e}_z]$$

B soll fortan ein Magnetfeld sein. Der Vektor **v** soll fortan die konstante Geschwindigkeit sein, mit der sich die Quelle eines **B**-Magnetfelds geradlinig und gleichförmig in einem ungestrichenen Koordinatensystem fortbewegt. Zunächst soll **v** weit unter der Lichtgeschwindigkeit liegen. **B** ist Magnetfeldstärke, die der von einem Beobachter gemessen wird, der im ungestrichenen System ruht.

Sowohl die Divergenz von **v** als auch die Divergenz von **B** ist jeweils null. Letzeres folgt aus einer der Maxwellschen Gleichungen, ersteres ergibt sich aus einem logischen Grund, denn wegen der Definition von **v** muss dieser Vektor überall im Raum derselbe sein.

Man beachte: Die Divergenzlosigkeit von **B** ist die einzige empirische Annahme, die bezüglich **B** aufgestellt wird.

Da der Gradient einer jeden Komponente der Geschwindigkeit **v** gleich null ist (die vektorielle Geschwindigkeit **v**, mit welcher die einzelnen Komponenten des Gradienten des **B**-Feldes multipliziert werden, ist an jedem Ort, für den das Magnetfeld und die Rotation des Kreuzproduktes bestimmt werden soll, dieselbe; folglich ist der Gradient jeder der drei Komponenten der Geschwindigkeit **v** jeweils null), vereinfacht sich die Gleichung zu:
(2)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}B_x)\vec{e}_x + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}B_y)\vec{e}_y + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}B_z)\vec{e}_z$$

Die vor und hinter den Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke können aus rein geometrischen Gründen mit dem Ausdruck **-dB/dt** gleichgesetzt werden, sodass gilt (siehe bereits [A. Föppl, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, 3. Auflage 1907, § 33, Gl. 116, S. 116]):
(3)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}B_x)\vec{e}_x + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}B_y)\vec{e}_y + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}B_z)\vec{e}_z = -\frac{\delta \boldsymbol{B}}{\delta t}$$

Zur Veranschaulichung: Der Einfachheit stelle man sich vor, die Quelle des Magnetfelds und damit das Feldlinienbild bewege sich im ungestrichenen Koordinatensystem des Labors

streng in positiver **x**-Richtung. Die **y**- und die **z**- Komponenten von **v** sind dann gleich null. Folglich gilt im ungestrichenen System des Labors nach (3):
(3a)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) = (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\boldsymbol{B}}$$

$$= (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_x)\vec{\boldsymbol{e}}_x + (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_y)\vec{\boldsymbol{e}}_y + (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\nabla}B_z)\vec{\boldsymbol{e}}_z = (v_x\frac{\delta B_x}{\delta x} + v_y\frac{\delta B_x}{\delta y} + v_z\frac{\delta B_x}{\delta z})\vec{\boldsymbol{e}}_x + (v_x\frac{\delta B_y}{\delta x} + v_y\frac{\delta B_y}{\delta y} + v_z\frac{\delta B_y}{\delta z})\vec{\boldsymbol{e}}_y$$

$$+ (v_x\frac{\delta B_z}{\delta x} + v_y\frac{\delta B_z}{\delta y} + v_z\frac{\delta B_z}{\delta z})\vec{\boldsymbol{e}}_z = v_x\frac{\delta B_x}{\delta x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + v_x\frac{\delta B_y}{\delta x}\vec{\boldsymbol{e}}_y + v_x\frac{\delta B_z}{\delta x}\vec{\boldsymbol{e}}_z$$

$$= \frac{\delta x}{\delta t}\,\frac{\delta B_x}{\delta x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\delta x}{\delta t}\,\frac{\delta B_y}{\delta x}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\delta x}{\delta t}\,\frac{\delta B_z}{\delta x}\vec{\boldsymbol{e}}_z$$

$$= \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\,\frac{B_{x2}-B_{x1}}{x_2-x_1}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\,\frac{B_{y2}-B_{y1}}{x_2-x_1}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\,\frac{B_{z2}-B_{z1}}{x_2-x_1}\vec{\boldsymbol{e}}_z$$

$$= \frac{-(B_{x1}-B_{x2})}{t_2-t_1}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{-(B_{y1}-B_{y2})}{t_2-t_1}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{-(B_{z1}-B_{z2})}{t_2-t_1}\vec{\boldsymbol{e}}_z = \frac{-dB_x}{dt}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{-dB_y}{dt}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{-dB_z}{dt}\vec{\boldsymbol{e}}_z = -\frac{\boldsymbol{\delta}\vec{\boldsymbol{B}}}{\delta t}$$

Stellt man sich vor, $\mathbf{dB_x/dx}$ sei an einer betrachteten Stelle numerisch positiv (und verkörpere somit in einem $\mathbf{B_x,x}$-Koordinatensystem eine Linie mit positiver Steigung), so ist $\mathbf{B_{x2}}$ größer als $\mathbf{B_{x1}}$. An ein- und derselben Stelle nimmt die Stärke von $\mathbf{B_x}$ jedoch im Laufe der Zeit **dt** ab und nicht zu. Dem zeitlich späteren Endpunkt des Intervalls **dt** , nämlich dem Zeitpunkt $\mathbf{t_2}$, entspricht ein kleinerer Wert von $\mathbf{B_x}$, nämlich $\mathbf{B_{x1}}$, während dem zeitlich früheren Endpunkt des Intervalls **dt** , nämlich $\mathbf{t_1}$, ein größerer Wert von $\mathbf{B_x}$ entspricht.

Man beachte: Das Ergebnis des Produktes aus dem (im Beispielsfall) numerisch positiven $\mathbf{v_x}$ und dem (im Beispielsfall) numerisch positiven $\mathbf{dB_x/dx}$ muss eine numerisch positive Zahl sein. Ohne Hinzufügung des Faktors -1 zu dem mit diesem Produkt gleichgesetzten Quotienten $\mathbf{dB_x/dt}$ erhielte man für diesen Quotienten jedoch ein falsches Ergebnis, nämlich eine negative Zahl, denn $\mathbf{B_x}$ nimmt ja mit der Zeit ab. Entsprechendes gilt für die anderen Produkte (nämlich $\mathbf{v_x}$ $\mathbf{dB_y/dx}$ und $\mathbf{v_x}$ $\mathbf{dB_z/dx}$).

Wegen der Geltung des Faradayschen-Maxwellschen Induktionsgesetzes (erst jetzt kommt dieses Gesetz ins Spiel) kann die Gleichung (3) wie folgt formuliert werden:
(4)

$$-\frac{\delta \vec{B}}{\delta t} = \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) = \nabla \times \vec{E}_{total}$$

Daraus wiederum folgt:
(5)

$$\vec{E}_{total} = \vec{B} \times \vec{v} + \vec{\nabla} C'_{contr} = \vec{B} \times \vec{v} + \vec{E}'_{abs-contr}$$

Die Größe **C'** stellt ein Skalarfeld unbekannten (orts- und zeitabhängigen) Betrages und unbekannten Vorzeichens dar. Setzt man voraus, im Raum existiere nur eine einzige bewegte Feldquelle, die sowohl das magnetische Feld und auch das Skalarfeld erzeugt, so kann das Skalarfeld **C'** nichts anderes als minus **phi'**, nämlich nichts anderes als das elektrostatische Potential sein. Genauer: Es muss sich um das im gestrichenen Ruhesystem der Feldquelle existente elektrostatische Potential handeln. Denn weil die Rotation des in (5) als Gradient dieses elektrostatischen Potentials auftauchenden, elektrostatischen Feldes null sein muss, ein lorentzkontrahiertes elektrostatisches Feld jedoch nicht wirbelfrei ist (siehe unten), muss es sich bei dem elektrostatischen Feld $\mathbf{E'}_{\mathbf{abs}}$ (wenn es überhaupt vorhanden ist), d.h., bei dem Gradienten des elektrostatischen Potentials, um das im gestrichenen Ruhesystem der bewegten Feldquelle anzutreffende elektrostatische Feld handeln, das ja – im gestrichenen Ruhesystem der Feldquelle – zweifelsfrei wirbelfrei ist. Der Index "**contr**" bringt zum Ausdruck, dass mitbewegte Meterstäbe, an deren Markierungen das Potential **C'** und sein Gradient im gestrichenen System (=Ruhesystem der Feldquelle) einen bestimmten Wert besitzen und die entlang der Bewegungsrichtung orientiert sind, im ungestrichenen System (in welchem die Feldquelle in Bewegung ist) kontrahiert sind. Existiert nur der bewegte Magnetpol als Feldquelle (und gibt es keine elektrische Ladung), so ist der Gradient von **C'** überall null.

Das elektrostatische Feld $\mathbf{E'}_{\mathbf{abs}}$, d.h., der Gradient von **C'**, soll (qualitativ) absolutes elektrisches Feld genannt werden, da es, wenn es existiert, sowohl für einen im gestrichenen Ruhesystem der Feldquelle ruhenden Beobachter als auch für einen im ungestrichenen System (in welchem die Feldquelle in Bewegung ist) ruhenden Beobachter vorhanden ist. Eine ähnliche Bezeichnung wird für Magnetfelder gewählt: Das von einem Magnetpol, z.B. dem eines langen Stabmagneten, erzeugte Magnetfeld ist nicht nur in demjenigen Bezugssystem vorhanden, in welchem der Magnetpol in Bewegung ist, sondern auch im Ruhesystem des Magnetpols. Sein Magnetfeld ist somit qualitativ absolut.

Eine Umstellung von (5) führt zu:
(6)

$$\vec{E}_{total} - \vec{\nabla} C'_{contr} = \vec{E}_{rel} = \vec{B} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

Dies ist die bereits allgemein bekannte, in der Literatur aber bislang nur aus der (von A. Einstein im Jahre 1905 modifizierten, für elektrische und magnetische Felder Geltung beanspruchenden) Lorentztransformation entnommene Gleichung des relativistischen elektrischen Feldes eines geradlinig und gleichförmig bewegten, absoluten Magnetpols. Das Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$ wird (vorläufig) relativistisches Feld genannt, weil es nur im ungestrichenen System, nicht aber im gestrichenen Ruhesystem der Quelle von **B** existiert. In den Lehrbüchern wird Gleichung (6), die anderweitig hergeleitet wird, unberechtigterweise (siehe dazu auch gleich unten) bislang nur für den Fall eines bewegten absoluten *Magnetpols*, nicht aber einer absoluten *elektrischen Ladung* angewandt (siehe nur E.M. Purcell, Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, Vol. II, 1. Auflage 1965, Kapitel 6.7, Gleichung 62, S. 214).

Bei relativistischen Geschwindigkeiten kann (6), wie erst unten gezeigt werden wird, wie folgt transformiert werden (bei einem bewegten absoluten Magnetpol als Feldquelle):
(6a)

$$\vec{E}_{total} - \vec{\nabla} C^{\prime}_{contr} = \vec{E}_{rel} = \vec{B}_{abs} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{B}_{abs} = -\vec{v} \times k\vec{B}^{\prime}_{abs}$$

$\mathbf{B}_{\mathbf{abs}}$ ist im ungestrichenen System des Labors angetroffene, qualitativ absolute Magnetfeld eines in **x**-Richtung bewegten Magnetpols, dessen **y**- und **z**-Komponenten durch Multiplikation der entsprechenden *gestrichenen* Komponenten dieses absoluten Feldes (d.h., der im gestrichenen Ruhesystem der Magnetfeldquelle vorhandenen Komponente des Magnetfelds) mit dem relativistischen Faktor **k** bestimmt werden. Wie weiter unten noch zu zeigen sein wird, wird auf diese Weise sichergestellt, dass das $\mathbf{B}_{\mathbf{abs}}$-Feld tatsächlich – wie für die Herleitung von (6) vorausgesetzt – divergenzlos ist.

Man beachte: Für die Bestimmung von $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$ in (6a) ist die **x**-Komponente des absoluten Magnetfelds ohne Bedeutung, da das Kreuzprodukt dieser vektoriellen Feldkomponente mit dem Vektor **v** gleich null ist.

1.2) Das relativistische elektrische Feld einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung

Für die Gültigkeit von (6) und damit für die Beziehung $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}= \mathbf{B} \times \mathbf{v}$ ist es gleichgültig, ob die Quelle des **B**-Feldes ein bewegter (absoluter) Magnetpol oder statt dessen eine geradlinig und gleichförmig bewegte elektrische Ladung ist. Im Folgenden soll angenommen werden, das **B**-Magnetfeld sei von einer bewegten elektrischen Ladung erzeugt worden. Darin steckt scheinbar eine weitere, im Versuch von Rowland entdeckte empirische Behauptung, nämlich eben die, dass die Bewegung einer elektrischen Ladung ein Magnetfeld erzeugt. Tatsächlich ergibt sich diese Behauptung aber, wie unten in (9a) gezeigt wird, in einfacher Weise aus den Maxwellschen Gleichungen.

Die in (6a) zum Ausdruck gebrachte Differenz zwischen dem (ungestrichenen) elektrischen Gesamtfeld der geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung und ihrem (gestrichenen) elektrostatischen Feld kann angesichts des Fehlens einer beschleunigten Ladung und damit des Fehlens eines induktiven elektrischen Feldes $\mathbf{E}_{\mathbf{ind}}$ (das dadurch definiert sein soll, dass seine Divergenz überall null ist) nur eine besondere Art eines elektrischen Feldes sein. Dieses Feld soll, wie bereits in (6) geschehen, relativistisches elektrisches Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$ genannt werden, da es für einen Beobachter, der sich zusammen mit der

Ladung bewegt, nicht existiert und nur im Ruhesystem des Labors auftritt. Es wird auf der Grundlage des Maxwellschen Gesetzes der Divergenzlosigkeit des **B**-Feldes und des Maxwell-Faradayschen Induktionsgesetzes abgeleitet; zusätzliche empirische Annahmen sind (und dies auch nur für kurze Zeit, siehe gleich unten) lediglich im Hinblick auf das Ergebnis des Rowlandschen Versuchs erforderlich!

Man beachte: Das relativistische elektrische Feld $\mathbf{E_{rel}}$ der geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung besitzt Quellen und Senken; diese liegen aber nicht in elektrischen Ladungen, sondern im leeren Raum! Denn ist die Quelle des Magnetfelds eine geradlinig und gleichförmig bewegte elektrische Ladung, so besitzt das **B**-Magnetfeld bekanntlich die Gestalt von Linien, die um die Flugbahn der Ladung kreisen. Die Linien des relativistischen elektrischen Feldes sind gemäß (6) sowohl dazu als auch im Verhältnis zur Flugbahn senkrecht ausgerichtet. Betrachtet man eine Momentaufnahme, so enden oder beginnen diejenigen Linien des relativistischen elektrischen Feldes, die vor und hinter der Ladung existieren, in der Nähe zur Flugbahn im Nichts und nicht etwa in der Ladung. Die Divergenz des relativistischen elektrischen Feldes einer bewegten Ladung ist somit von null verschieden. Dasselbe gilt für seine Rotation: Auch diese ist aufgrund der geometrischen Struktur des Feldes, nämlich bereits aufgrund des Fehlens von Komponenten in Bewegungsrichtung der Feldquelle, von null verschieden.

Beides gilt, wie unten gezeigt werden wird, auch für das in (5) beschriebene elektrische *Gesamt*feld der geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung: Auch dieses Feld hat eine Divergenz, die an einigen Stellen von null verschieden, aber dort nicht immer gleich der Dichte der elektrischen Ladung ist. Was die *Rotation* des Gesamtfeldes betrifft, so ist diese nicht überall null.

Daraus folgt wiederum: Da sich einerseits aus dem Ampere-Maxwellschen Gesetz an Orten der Abwesenheit einer realen Stromdichte **j** die Beziehung
(6b)

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{\delta \vec{E}}}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0$$

ergibt (siehe dazu auch weiter unten), andererseits aber die Divergenz des relativistischen elektrischen Feldes $\mathbf{E_{rel}}$ von null verschieden und zudem zeitlich veränderlich sein kann, kann das relativistische elektrische Feld $\mathbf{E_{rel}}$ nicht im Feld **E** der Ampere-Maxwellschen Gleichung enthalten sein. Dort kann mit **E** vielmehr nur die Summe aus dem (auch im ungestrichenen System dem Gaußschen Gesetz gehorchenden) elektrostatischen, qualitativ absoluten elektrischen Feld $\mathbf{E_{abs}}$ und dem (u.a.) bei Beschleunigung von Ladungen auftretenden induktiven Feld $\mathbf{E_{ind}}$ (das durch seine überall – und nicht nur außerhalb eines felderzeugenden Körpers – anzutreffende Divergenzlosigkeit definiert ist) gemeint sein.

2) Das relativistische B-Feld einer geradlinig und gleichförmig bewegten Quelle, sei

diese eine elektrische Ladung oder ein absoluter Magnetpol

2.1) Das relativistische B-Feld der geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung

Aber auch das (allgemein bekannte) relativistische **B**-Feld der geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung (und nicht bloß das relativistische *elektrische* Feld der bewegten Ladung) kann – ganz ohne Benutzung der Lorentztransformation für elektrische und magnetische Felder – seinerseits als Funktion des qualitativ absoluten (elektrostatischen) Feldes der bewegten Ladung und deren Geschwindigkeit dargestellt werden. Denn – ähnlich wie bei der oben betrachteten Rotation von **B x v** – gilt aus Gründen der Vektoranalysis und der Geometrie (zunächst für nicht-relativistische Geschwindigkeiten **v**):
(7)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E}_{abs}) = (\vec{E}_{abs} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}_{abs} + \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{abs}) - \vec{E}_{abs}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

$$= (\vec{E}_{abs} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}_{abs}$$

$$= [(\vec{E}_{abs} \cdot \vec{\nabla}v_x)\vec{e}_x + (\vec{E}_{abs} \cdot \vec{\nabla}v_y)\vec{e}_y + (\vec{E}_{abs} \cdot \vec{\nabla}v_z)\vec{e}_z] - [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}E_x)\vec{e}_x + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}E_y)\vec{e}_y + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}E_z)\vec{e}_z]$$

$$= -[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}E_x)\vec{e}_x + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}E_y)\vec{e}_y + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}E_z)\vec{e}_z] = -(v_x\frac{\delta E_x}{\delta x} + v_y\frac{\delta E_x}{\delta y} + v_z\frac{\delta E_x}{\delta z})\vec{e}_x - (v_x\frac{\delta E_y}{\delta x} + v_y\frac{\delta E_y}{\delta y} + v_z\frac{\delta E_y}{\delta z})\vec{e}_y$$

$$-(v_x\frac{\delta E_z}{\delta x} + v_y\frac{\delta E_z}{\delta y} + v_z\frac{\delta E_z}{\delta z})\vec{e}_z = -v_x\frac{\delta E_x}{\delta x}\vec{e}_x - v_x\frac{\delta E_y}{\delta x}\vec{e}_y - v_x\frac{\delta E_z}{\delta x}\vec{e}_z = -\frac{\delta x}{\delta t}\frac{\delta E_x}{\delta x}\vec{e}_x - \frac{\delta x}{\delta t}\frac{\delta E_y}{\delta x}\vec{e}_y - \frac{\delta x}{\delta t}\frac{\delta E_z}{\delta x}\vec{e}_z$$

$$= -\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\frac{E_{x2} - E_{x1}}{x_2 - x_1}\vec{e}_x - \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\frac{E_{y2} - E_{y1}}{x_2 - x_1}\vec{e}_y - \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\frac{E_{z2} - E_{z1}}{x_2 - x_1}\vec{e}_z$$

$$= -\frac{-(E_{x1} - E_{x2})}{t_2 - t_1}\vec{e}_x - \frac{-(E_{y1} - E_{y2})}{t_2 - t_1}\vec{e}_y - \frac{-(E_{z1} - E_{z2})}{t_2 - t_1}\vec{e}_z = \frac{dE_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dE_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dE_z}{dt}\vec{e}_z = \frac{\delta \vec{E}_{abs}}{\delta t}$$

Zur Erläuterung: An den betrachteten Orten, für welche die Rotation des Vektorprodukts bestimmt werden soll, existieren keine Quellen oder Senken des qualitativ absoluten, in beiden Ruhesystemen (dem gestrichenen und dem ungestrichenen) wahrgenommenen (und eben deshalb als absolut bezeichneten) Feldes $\mathbf{E}_{\mathrm{abs}}$, sodass auch hier eine Vereinfachung der Gleichung vorgenommen werden kann. Zudem ist auch hier die Divergenz von **v** gleich null, so dass eine weitere Vereinfachung der Gleichung möglich ist.

Man beachte: Die Divergenzlosigkeit des qualitativ absoluten Feldes $\mathbf{E}_{\mathbf{abs}}$ an allen Orten, an den sich keine Ladungen befinden, ist die einzige empirische Annahme, die bezüglich dieses Feldes gemacht wird. Eben weil das oben beschriebene relativistische elektrische Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$ der gleichförmig und geradlinig bewegten elektrischen Ladung aber sehr wohl Quellen und Senken an Orten besitzt, an denen sich keine Ladungen befinden, kann es hier nicht Bestandteil des in (7) benutzten elektrischen Feldes sein. Vielmehr kann das in (7) benutzte elektrische Feld nur das Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{abs}}$ sein. Das Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{abs}}$ unterscheidet sich vom kugelförmigen ungestrichenen elektrostatischen Feld (das im Ruhesystem der Feldquelle anzutreffen ist) allein durch die Wirkung der Lorentzkontraktion von Meterstäben auf dieses Feld. Die außerhalb des felderzeugenden Körpers gegebene, trotz der Lorentzkontraktion garantierte Divergenzlosigkeit des Feldes $\mathbf{E}_{\mathbf{abs}}$ wird weiter unten bewiesen werden. $\mathbf{E}_{\mathbf{abs}}$ ist somit – und darauf kommt es wegen der aufgestellten Voraussetzung der Divergenzlosigkeit an – zugleich derjenige Teil des ungestrichenen elektrischen Gesamtfeldes der geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung, dessen Linien außerhalb des felderzeugenden Körpers divergenzlos sind, d.h., keine Quellen oder Senken besitzen.

Es wird weiterhin angenommen, die Bewegung der Feldquelle erfolge in positiver **x**-Richtung.

Es gilt also nach (7):
(7a)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{E}_{abs}) = \frac{\delta \vec{E}_{abs}}{\delta t}$$

Wegen des Ampere-Maxwellschen Gesetzes kann diese Gleichung – angesichts der Abwesenheit einer realen Stromdichte **j** an den betrachteten Orten, d.h., außerhalb des felderzeugenden Körpers – nach Erweiterung mit $\mathbf{1/c^2}$ auch wie folgt formuliert werden:
(8)

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\delta \vec{E}_{abs}}{\delta t} = \vec{\nabla} \times \frac{(\vec{v} \times \vec{E}_{abs})}{c^2} = \vec{\nabla} \times \vec{B}_{total}$$

Daraus wiederum folgt:
(9)

$$\vec{B}_{total} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{abs}}{c^2} + \vec{\nabla} D'_{contr} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{abs}}{c^2} + \vec{B}'_{abs-contr}$$

oder
(9a)

$$\vec{B}_{total} - \vec{\nabla} D'_{contr} = \vec{B}_{rel} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{abs}}{c^2}$$

Die Größe **D'** stellt ein Skalarfeld unbekannten (orts- und zeitabhängigen) Betrages und unbekannten Vorzeichens dar. Tatsächlich kann **D'** nichts anderes als das von einem eventuell vorhandenen absoluten Magneten erzeugte skalare magnetische Potential sein. Deshalb ist der Gradient dieses Potentials nichts anderes als das qualitativ absolute, nämlich auch von einem mitbewegten Beobachter wahrgenommene Magnetfeld eines Magneten. Dessen Rotation muss im leeren Raum null sein, denn es handelt sich um den Gradienten eines Skalars, nämlich des magnetischen Potentials. (Ist im Raum nur eine geradlinig und gleichförmig bewegte elektrische Ladung, aber kein absoluter Magnetpol vorhanden, so ist der Gradient von **D'** gleich null.) Da ein lorentzkontrahiertes, qualitativ absolutes Magnetfeld jedoch nicht wirbelfrei ist (siehe dazu auch weiter unten), kann es sich nur um das im gestrichenen Ruhesystem des Magneten feststellbare Magnetfeld $\mathbf{B'}_{\mathbf{abs\text{-}cntr}}$ handeln, dessen Rotation im leeren Raum (im gestrichenen System) zweifelsfrei null ist. Durch den Index "**contr**" wird auch hier zum Ausdruck gebracht, dass die mitbewegten Meterstäbe, an deren Markierungen bestimmte Werte von $\mathbf{B'}_{\mathbf{abs}}$ anzutreffen sind, im ungestrichenen System verkürzt sind.

Das in (9a) beschriebene, sich als Differenz des Gesamtmagnetfelds und des qualitativ absoluten Magnetfelds ergebende relativistische Magnetfeld $\mathbf{B}_{\mathbf{rel}}$ einer gleichförmig und geradlinig bewegten elektrischen Ladung wurde allein aus der Divergenzlosigkeit des Feldes $\mathbf{E}_{\mathbf{abs}}$ im leeren Raum (außerhalb einer Feldquelle) und dem Maxwell-Ampereschen Gesetz abgeleitet. Weitere empirische Annahmen waren nicht erforderlich. Damit ist auch das Ergebnis des Rowlandschen Versuchs (siehe oben), das ja durch (9a) beschrieben wird, aus diesen beiden Voraussetzungen abgeleitet worden.

(9a) kann verwandelt werden in:
(10)

$$\vec{B}_{total} - \vec{B}'_{abs-contr} = \vec{B}_{rel} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{abs}}{c^2} \approx \frac{\vec{v} \times q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}$$

Die ganz rechte Seite, in welcher der Betrag des Vektors $\mathbf{E}_{\mathbf{abs}}$ (=E_{abs} $\mathbf{e}_r$) für nichtrelativistische Geschwindigkeiten durch **q/(4pi epsilon$_0$ r²)** ersetzt wurde, gibt das Gesetz von Biot-Savart wieder (der Einheitsvektor $\mathbf{e}_r$ zeigt von der Ladung auf den Beobachter). Man erhält dieses Gesetz somit als Ableitung aus dem Maxwell-Ampereschen Gesetz.

2.2) Konsequenzen des relativistischen B-Feldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung für die Bestimmung ihres in 1.2 beschriebenen relativistischen *elektrischen* Feldes

Eine Zusammenfassung der beiden erhaltenen Gleichungen (6) und (10) führt zu (bei Abwesenheit eines bewegten absoluten Magnetpols) zu der folgenden Formulierung des relativistischen elektrischen Feldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung:

(10a)

$$\vec{E}_{rel} = -\vec{v} \times \vec{B}_{rel} = -\vec{v} \times \frac{(\vec{v} \times \vec{E}_{abs})}{c^2} = -\vec{v} \times \frac{(\vec{v} \times k\vec{E}'_{abs})}{c^2}$$

Das elektrische Gesamtfeld der geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung (bei Abwesenheit eines bewegten absoluten Magnetpols) kann nach (5) und (9a) nunmehr formuliert werden als:
(11)

$$\vec{E}_{total} = -\vec{v} \times \vec{B}_{rel} + \vec{\nabla} C'_{contr} = -\vec{v} \times \frac{(\vec{v} \times \vec{E}_{abs})}{c^2} + \vec{E}'_{abs-contr}$$

2.3) Das relativistische B-Feld eines geradlinig und gleichförmig bewegten, absoluten Magnetpols

Ist im Raum keine gleichförmig und geradlinig bewegte elektrische Ladung, sondern ein gleichförmig und geradlinig bewegter absoluter Magnetpol vorhanden (der voraussetzungsgemäß nicht rotieren soll), so besitzt das gemäß (6) erzeugte relativistische elektrische Feld – anders als das relativistische elektrische Feld einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung – im Raum außerhalb des felderzeugenden Körpers keine Quellen oder Senken. Als Konsequenz daraus kann das in den Gleichungen (7) bis (11) benutzte absolute elektrische Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{abs}}$ auch durch ein in (6) und (6a) beschriebenes relativistisches elektrisches Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$ eines bewegten absoluten Magnetpols ersetzt werden. Um das relativistische elektrische Feld einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung vom elektrischen Feld eines bewegten absoluten Magnetpols zu unterscheiden, soll das elektrische Feld eines bewegten absoluten Magnetpols aber nicht länger $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$, sondern $\mathbf{E}_{\mathbf{ind}}$ genannt werden. Unter einem induktiven elektrischen Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{ind}}$ wird ein elektrisches Feld verstanden, dessen Rotation nicht überall null ist und das überall divergenzlos ist. Diese Qualifikation trifft (auch) auf das von einem bewegten absoluten Magnetpol erzeugte, relativistische elektrische Feld zu, wenn auch mit Ausnahme des Inneren des Magneten. (Beweis: Ein punktförmiger Magnetpol erzeugt bei einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung ein elektrisches Feld, das sich in seiner Struktur nicht von einem Magnetfeld unterscheidet, das von einer punktförmigen elektrischen Ladung bei deren geradliniger und gleichförmiger Bewegung erzeugt wird. In beiden Fällen bilden die Feldlinien geschlossene Kreise um die Bahn der Feldquelle.)

Dann verwandelt sich (9a) mittels (6) und (6a) in
(11a)

$$\vec{B}_{rel} = \vec{v} \times \frac{\vec{E}_{ind}}{c^2} = \vec{v} \times \frac{(-\vec{v} \times \vec{B}_{abs})}{c^2}$$

Somit besteht eine vollständige Analogie zu (10a).

Für das totale Magnetfeld **B** bei einem absoluten Magnetpol als Feldquelle (und bei Abwesenheit einer bewegten elektrischen Netto-Ladung) gilt dann nach (6a), (9) und (11a):
(11b)

$$\vec{B}_{total} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{ind}}{c^2} + \vec{B}'_{abs-contr} = \vec{v} \times \frac{(-\vec{v} \times \vec{B}_{abs})}{c^2} + \vec{B}'_{abs-contr} = B_{rel} + \vec{B}'_{abs-contr}$$

Man beachte: Ganz so wie das *elektrische* Gesamtfeld und das relativistische *elektrische* Feld der geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung besitzt sowohl das magnetische *Gesamt*feld als auch das *relativistische* (Partial-)Magnetfeld des geradlinig und gleichförmig bewegten, absoluten Magnetpols Quellen und Senken im freien Raum außerhalb der "magnetischen Ladung". Dies ergibt sich aus der strukturellen Ähnlichkeit zwischen den magnetischen Gleichungen (11a) und (11b) einerseits und den elektrischen Gleichungen (10a) und (11) andererseits (siehe dazu auch weiter unten).

Aus diesem Grund muss überall dort, wo ein Magnetpol in Bewegung ist, bei relativistischen Geschwindigkeiten (d.h., bei solchen, die nahe bei **c** liegen) unter dem **B**, das in den für das elektrische Feld des bewegten Magnetpols geltenden Gleichungen auftaucht, das Magnetfeld $\mathbf{B}_{abs}$ und nicht das Gesamtmagnetfeld $\mathbf{B}_{total}$ verstanden werden. Denn bei der Herleitung von (5) und (6) wurde ja angenommen, dass das vom Magnetpol erzeugte **B**-Feld im Raum außerhalb der Feldquelle divergenzlos sei. Das Feld $\mathbf{B}_{abs}$ unterscheidet sich vom kugelförmigen ungestrichenen magnetostatischen Feld des Magnetpols (das im Ruhesystem der Feldquelle anzutreffen ist) allein durch die Wirkung der Lorentzkontraktion von Meterstäben auf dieses Feld. Die außerhalb des felderzeugenden Körpers gegebene, trotz der Lorentzkontraktion garantierte Divergenzlosigkeit des Feldes $\mathbf{B}_{abs}$ wird weiter unten bewiesen werden. $\mathbf{B}_{abs}$ ist somit – und darauf kommt es wegen der für die Herleitung des relativistischen Feldes aufgestellten Voraussetzung der Divergenzlosigkeit an – zugleich derjenige Teil des ungestrichenen magnetischen Gesamtfeldes des geradlinig und gleichförmig bewegten Magnetpols, dessen Linien außerhalb des felderzeugenden Körpers divergenzlos sind, d.h., keine Quellen oder Senken besitzen.

Gleichzeitig folgt aus (11a) und (11b) die Existenz von magnetischen Monopolen: Die Linien des relativistischen Magnetfelds des bewegten Magnetpols enden oder beginnen, wie bereits ausgeführt, im leeren Raum (dies gilt auch für einige Linien des in Gleichung 11b beschriebenen Gesamtmagnetfelds, siehe im Einzelnen weiter unten); dort liegt folglich ein einzelner Magnetpol, ohne dass magnetische Feldlinien zu einem zweiten Magnetpol führen müssten! (Man stelle sich nur vor, der bewegte absolute Magnetpol stelle das Ende eines sehr langen Stabmagneten dar, wobei das andere Ende des Stabmagneten und damit der andere absolute Magnetpol an der Bewegung nicht teilnimmt.)

Man beachte: Die Maxwell-Gaußsche Gleichung des Magnetismus, wonach die Divergenz von **B** überall und immer null ist, ist somit einschränkend dahingehend anzuwenden, dass unter **B** nicht das relativistische Magnetfeld des geradlinig und gleichförmig bewegten absoluten Magnetpols verstanden wird (siehe dazu weiter unten).

Ist sowohl ein bewegter absoluter Magnetpol als auch eine bewegte elektrische Nettoladung vorhanden, so gilt nach (11b) und (9a):
(11c)

$$\vec{B}_{total} = \vec{v} \times \frac{(-\vec{v} \times \vec{B}_{abs})}{c^2} + \vec{B}'_{abs-contr} + \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{abs}}{c^2}$$

3) Das Trouton-Noble-Paradoxon und seine Lösung

Die physikalische Richtigkeit der Gleichungen (10a) und (11) wird nicht zuletzt dadurch bewiesen, dass mit ihrer Hilfe die Lösung des Trouton-Noble-Paradoxons gelingt.

Dieses Paradoxon soll erläutert werden.

Bewegen sich zwei elektrisch mit gleichem Vorzeichen geladene Kugeln, die im gestrichenen System ruhen, mit gleicher Geschwindigkeit geradlinig-gleichförmig im ungestrichenen System des Beobachters (Ruhesystem des Labors) parallel zur **x**-Achse und liefern sich dort ein Kopf-an-Kopf-Rennen, so wirkt auf die eine der beiden Kugeln im ungestrichenen System des Beobachters (Labors) nicht bloß die elektrostatische Abstoßungskraft, sondern auch noch eine entgegengesetzte Lorentzkraft, die dadurch entsteht, dass die zweite Kugel im ungestrichenen System des Beobachters ein Magnetfeld erzeugt, durch das sich die erste Kugel bewegt. Der Absolutbetrag des Magnetfelds der anderen Kugel ist gleich $\mathbf{vE_y/c^2}$. Dann ist die gegen die elektrostatische Abstoßungskraft gerichtete spezifische Lorentzkraft (Kraft pro Ladungseinheit) gleich $\mathbf{v^2E_y/c^2}$.

Probleme ergeben sich allerdings (spätestens) dann, wenn man die Situation verändert und nunmehr annimmt, die erste Kugel besitze gegenüber der zweiten einen zeitlich konstanten Vorsprung. Genauer: Im ungestrichenen Ruhesystem des Labors soll die Verbindungslinie der beiden Kugeln mit der **x**-Achse einen Winkel von 45° bilden. Auf beide Kugeln wirkt nunmehr jeweils eine Lorentzkraft (die das Ergebnis der Existenz des Magnetfelds der jeweils anderen Kugel ist) streng parallel zur **y**-Achse, also quer zur Bewegungsrichtung. Bei der einen Kugel weist die Lorentzkraft in die positive, bei der anderen in die negative **y**-Richtung. Sind die beiden Kugeln in starrer Verbindung, so wirkt auf die Vorrichtung folglich ein Drehmoment.

Im gestrichenen Ruhesystem der Kugeln ist das Drehmoment jedoch nicht existent.

Dieses Paradoxon (das oftmals in komplizierteren Erscheinungsformen diskutiert wird, ohne dass dadurch das Wesen des Paradoxons verändert würde) wird gemeinhin Trouton-Noble-Paradoxon genannt und gilt bis heute als ungelöst (siehe dazu:J. Franklin, “The lack of rotation in the Trouton-Noble-Experiment”, European Journal of Physics, Band 27 – 2006 –, S. 1251-1256; *O.D. Jefimenko*, Journal of Physics A, Vol 32 -1999-, S. 3755-3762; *R.M. Mould*, Basic Relativity, New York 1996, Kapitel 1.6 and 6.4; S.A. *Teukolsky*, American

Journal of Physics, Band 64 -1996-, pp. 1104-1109; *A.K. Singal,* American Journal of Physics, Band 61 -1993-, S. 428-433; *W. Butler*, American Journal of Physics, Band 36 -1968-, S. 936-941; *P.S. Epstein*, "Über relativistische Statik", Annalen der Physik, Band 341 – 1911 – , S. 779ff; *M. Laue*, Annalen der Physik, Band 35 -1911-, S. 524-542; *H.A. Lorentz*, "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light", in: H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, H. Weyl, The Principle of Relativity, A Collection of Original Memoirs, Dover Publ. 1952, S. 29; *F.T. Trouton* and *H.R. Noble*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 202 -1903-, S. 165-181).

Wendet man hingegen (10a) und (11) an, so wird die im ungestrichenen Ruhesystem des nicht mitbewegten Beobachters (Labors) auftauchende Lorentzkraft durch die Wirkung des dort vorhandenen relativistischen elektrischen Feldes der jeweils anderen Kugel vollständig neutralisiert! Ein resultierendes Drehmoment kann somit im ungestrichenen System nicht vorhanden sein. Denn im ungestrichenen Ruhesystem des nicht mitbewegten Beobachters gilt dann nach (11) für die Gesamtkraft **F**, die auf eine einzelne Kugel wirkt:
(11d)

$$\vec{F} = q\vec{E}_{total} + \vec{F}_{Lorentz} = [(-q\vec{v} \times \vec{B}_{rel}) + q\vec{E}'_{abs-contr}] + (q\vec{v} \times \vec{B}_{rel}) = q\vec{E}'_{abs-contr} = \vec{F}'$$

Die erste runde Klammer stellt die Kraft des relativistischen elektrischen Feldes auf die Ladung **q** einer Kugel dar, die zweite Klammer enthält die Lorentzkraft. Man erkennt: Die Gesamtkraft ist in beiden System gleich groß.

4) Das relativistische elektrische Feld der bewegten Ladung in der Darstellung der Lehrbücher; Divergenz und Rotation des wirklichen und des vermeintlichen Gesamtfeldes

4.1) Das relativistische elektrische Feld als Teil des elektrischen Gesamtfeldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung nach herkömmlicher Meinung

Bei relativistischen Geschwindigkeiten – und nur bei diesen – gelangt auch die herrschende Lehrbuchmeinung (*Georg Joos*, Lehrbuch der Theoretischen Physik, 15. Auflage 1989, 3. Buch, Kapitel XIII, § 4 , S. 399; *E. M. Purcell*, Berkeley Physics Course II, Electricity and Magnetism, New York 1965, Kapitel 5.6, S. 160, 161, Fig. 5.13) im Ergebnis zur Anerkennung eines relativistischen elektrischen Feldes $\mathbf{E'}_{\mathbf{rel}}$ einer gleichförmig und geradlinig bewegten elektrischen Ladung, die als ein Ergebnis der Lorentzkontraktion des elektrostatischen Feldes angesehen wird (siehe nur *J.D. Jackson*, Klassische Elektrodynamik, 4. Auflage 2006, S. 648: *"Die Komprimierung der Feldlinien in transversaler Richtung schließlich kann man als Folge der FitzGerald-Lorentz'schen Längenkontraktion betrachten.*").

Das im gestrichenen System des Labors vorhandene elektrostatische Gesamtfeld $\mathbf{E'}_{\mathbf{total}}$ der gleichförmig und geradlinig bewegten Ladung (bei Abwesenheit eines bewegten absoluten

Magneten) wird von der Lehrbuchmeinung (siehe nur H. *Daniel*, Physik, Band 2: Elektrodynamik, Relativistische Physik, 1997, Kapitel 4.5.1, S. 360, 361) wie folgt postuliert (das ungestrichene System ist nunmehr das Ruhesystem der Ladung; das gestrichene System ist das System, in welchem die Ladung in Bewegung ist; bei der zweiten eckigen Klammer ist der Index "**contr**" weggelassen worden, da die Verkürzung von Meterstäben, die im ungestrichenen System ruhen, bereits jeweils durch den Faktor "**k-1**" deutlich wird):
(12)

$$\vec{E}'_{total} = E_x\, \vec{e}'_x + k\, E_y\, \vec{e}'_y + k\, E_z\, \vec{e}'_z$$

$$= [\, E_x\, \vec{e}'_x + E_y\, \vec{e}'_y + E_z\, \vec{e}'_z\,]_{contr} + [(k-1)\, E_y\, \vec{e}'_y + (k-1)\, E_z\, \vec{e}'_z] = \vec{E}_{abs-contr} + \vec{E}'_{rel}$$

Wo das totale elektrische Feld $\mathbf{E'}_{total}$ der gleichförmig und geradlinig bewegten Ladung eine strenge **x'**-Richtung besitzt (z.B. an irgendeinem Punkt der geraden Bahn der betrachteten Punktladung), ist seine Stärke in beiden Ruhesystemen dieselbe.

In exakter Querrichtung wird das totale elektrische Feld der geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung (bei Abwesenheit eines Magnetpols) in Gemäßheit der herkömmlichen Lorentztransformation und gemäß (12) mit $\mathbf{E'}_{total} = \mathbf{E'}_y = \mathbf{kE}_y = \mathbf{kE}_{abs}$ postuliert. Der Faktor **k** ist gleich:

$$k = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$$

Wie man in (12) leicht erkennt, ist das totale elektrische Feld $\mathbf{E'}_{total}$ der bewegten Ladung im gestrichenen System (in welchem die Ladung in Bewegung ist) auch hier aus zwei Komponenten zusammengesetzt, nämlich zum einen aus der im ungestrichenen System an Markierungen von dort ruhenden, im gestrichenen System kontrahierten Meterstäben gemessenen Größe $\mathbf{E}_{abs}$; zum anderen besteht das Feld $\mathbf{E'}_{total}$ aus $\mathbf{E'}_{rel}$, d.h., dem relativistischen elektrischen Feld der bewegten Ladung. Die zweite Komponente, d.h., das relativistische elektrische Feld $\mathbf{E'}_{rel}$ der bewegten Ladung, ist gemäß (12) gleich:
(13)

$$\vec{E}'_{rel} = (k-1)\, E_y\, \vec{e}'_y + (k-1)\, E_z\, \vec{e}'_z \quad (\textit{falsch}!)$$

Die Gleichung (13) steht jedoch im Widerspruch zu (10a), wonach gilt (siehe dazu auch weiter unten):

$$\vec{E}'_{rel} = \frac{v^2}{c^2}\, E'_y\, \vec{e}'_y + \frac{v^2}{c^2}\, E'_z\, \vec{e}'_z = k\, \frac{v^2}{c^2}\, E_y\, \vec{e}'_y + k\, \frac{v^2}{c^2}\, E_z\, \vec{e}'_z$$

Man beachte jedoch: Das in (12) unrichtig dargestellte elektrische Gesamtfeld ist gemäß der physikalisch korrekten Gleichung (10a) gleich dem im System des Labors existenten elektrischen Feld $\mathbf{E'}_{abs}$.

4.2) Die Rotation des von der herkömmlichen Meinung postulierten elektrischen Gesamtfeldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung

Die Rotation des von (12) (allerdings unzutreffend) beschriebenen elektrischen Gesamtfeldes $\mathbf{E'}_{total}$ – und damit die Rotation des in (10a) korrekt beschriebenen, im System des Labors existenten Feldes $\mathbf{E'}_{abs}$ – ist von null verschieden. Um dies zu erkennen, betrachte man das folgende geschlossene Wegintegral der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E'}_{total}$: Die elektrische, punktförmige Ladung bewege sich entlang der **x'**-Achse. Man nehme eine Momentaufnahme des Feldes $\mathbf{E'}_{total}$ im gestrichenen System und beginne das Wegintegral an einem Punkt, der sich auf einer Feldlinie befindet, die exakt parallel zur **y'**-Achse (somit senkrecht zur Bewegungsrichtung der Ladung und damit senkrecht zur Bewegungsrichtung des ungestrichenen Systems) ausgerichtet ist und in der von den **x'**- und **y'**-Achsen aufgespannten Ebene liegt (der Ausgangspunkt liegt somit querab von der Monentanposition der Ladung). Auf der ersten Etappe folge man dieser Linie, bis man sich sehr weit von der Ladung entfernt hat. In der zweiten Etappe bewege man sich (in der Momentaufnahme) senkrecht zur ersten Etappe, nämlich streng parallel oder antiparallel zur **x'**-Achse, über eine große Distanz. In der dritten Etappe bewege man sich antiparallel zur ersten Etappe in Richtung auf die **x'**-Achse. In der vierten Etappe vollende man den rechteckigen, geschlossenen Weg und bewege sich parallel bzw. antiparallel zur **x'**-Achse zum Ausgangspunkt zurück.

Sind die einzelnen Etappen weit genug, so tragen nur die Etappen eins und vier zum Gesamtergebnis des Wegintegrals der Feldstärke bei, während die Beiträge der Etappen zwei und drei vernachlässigbar sind.

Im ungestrichenen System (Ruhesystem der Ladung) sind die Beiträge der Etappen eins und vier entgegengesetzt gleich, denn dort ist das elektrische Feld zweifellos überall wirbelfrei. Nicht so im gestrichenen System (in welchem die Feldquelle in Bewegung ist). Zum einen ist die gestrichene Feldstärke an allen Punkten der ersten Etappe im gestrichenen System gegenüber der Feldstärke im ungestrichenen System um den Faktor **k** vergrößert. Zum anderen gilt für die vierte Etappe: Zwar ist die gestrichene Feldstärkenkomponente in der Richtung des integrierenden Voranschreitens (**x'**-Richtung) hier an jedem Punkt so groß wie die ungestrichene; jedoch ist die Länge der Etappe im gestrichenen System gegenüber der Länge im ungestrichenen System wegen der sich aus der allgemeinen Lorentztransformation ergebenden Verkürzung von mitbewegten (d.h., im ungestrichenen System ruhenden) Meterstäben kürzer. Damit ist auch der Betrag des Wegintegrals der vierten Etappe kürzer.

Im gestrichenen System ist das Wegintegral der gestrichenen elektrischen Feldstärke $\mathbf{E'}_{total}$ somit wegen zweier Effekte, deren Wirkungen sich addieren, von null verschieden: Zum einen wegen der Verkürzung der Meterstäbe entlang der vierten Etappe, zum anderen wegen der Vergrößerung der Feldstärke auf der ersten Etappe um den Faktor **k**.

Ist das makroskopische Wegintegral des Feldes $\mathbf{E'}_{total}$ von null verschieden, so kann dessen Rotation nicht überall null sein.

4.3) Die Divergenz des von der herkömmlichen Meinung postulierten elektrischen Gesamtfeldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung

Die *Divergenz* des in (12) inkorrekt beschriebenen elektrischen Gesamtfeldes $\mathbf{E'}_{total}$ der gleichförmig und geradlinig bewegten elektrischen Ladung – und damit die Divergenz des in (10a) korrekt beschriebenen, im System des Labors existenten Feldes $\mathbf{E'}_{abs}$ – ist gleich der elektrischen Ladungsdichte; ganz so, wie das Gaußsche Gesetz dies verlangt:

Man stelle sich vor, die elektrische Ladung befinde sich (im gestrichenen System des Labors) im Zentrum eines zusammen mit dem ungestrichenen System bewegten Rohres großer Länge, das entlang der **x'**-Achse orientiert ist. Ferner soll unterstellt werden (siehe dazu gleich unten), dass sämtliche Feldlinien trotz der Bewegung der Ladung (Feldquelle) in Richtung der tatsächlichen Momentanposition der bewegten Ladung und nicht etwa in Richtung der scheinbaren Momentanposition weisen. Die Länge des Rohres ist im gestrichenen System gegenüber dem Ruhezustand um den Faktor **1/k** verkürzt; da aber die **y'**- und **z'**-Komponenten des resultierenden elektrischen Feldes nach (12) um denselben Faktor **k** verstärkt sind, ist der elektrische Fluss, der durch die elektrisch nicht leitfähige Rohrwand tritt, unverändert, egal ob Ladung und Rohr bewegt sind oder statt dessen ruhen.

Für mitbewegte konzentrische Rohre, die einen beliebig größeren oder kleineren Durchmesser besitzen (und in deren Zentrum die Ladung jeweils sitzt), gilt das Gleiche. Dann aber enden oder beginnen alle Feldlinien in der Ladung, und die Zahl der dort endenden Feldlinien ist unabhängig von der Bewegungsgeschwindigkeit der Ladung. Es gilt also:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}'_{abs} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(Ähnliches muss dann wegen der gleichen Feldstruktur auch für das Feld $\mathbf{B'}_{abs}$ des geradlinig und gleichförmig bewegten absoluten Magnetpols gelten; auch dieses Feld ist im gestrichenen System außerhalb der Feldquelle divergenzlos.)

Man beachte: Die Divergenz des in (13) inkorrekt beschriebenen relativistischen Feldes $\mathbf{E'}_{rel}$ (als Teil des in Gl. 12 postulierten elektrischen Gesamtfeldes) ist sehr wohl an einigen Stellen von null verschieden und dort nicht gleich der elektrischen Ladungdichte. Da die Divergenz des in (12) inkorrekt beschriebenen *Gesamt*feldes $\mathbf{E'}_{total}$ jedoch – unter Wahrung des Gaußschen Gesetzes – gleich der elektrischen Ladungsdichte ist, muss die Divergenz des isoliert betrachteten Feldes $\mathbf{E}_x\mathbf{e}_x+\mathbf{E}_y\mathbf{e}_y+\mathbf{E}_z\mathbf{e}_z$, im gestrichenen System betrachtet, wegen der Lorentzkontraktion bewegter Meterstäbe ebenfalls vom Gaußschen Gesetz abweichen, und zwar so, dass die Überlagerung der beiden Partialfelder des in (12) inkorrekt beschriebenen Gesamtfeldes $\mathbf{E'}_{total}$, die für sich gesehen jeweils das Gaußsche Gesetz nicht erfüllen, zum Gaußschen Gesetz führt.

4.4) Die Rechtfertigung des relativistischen Korrekturfaktors k bei der Beschreibung des vorgeblich totalen, in Wirklichkeit lediglich absoluten elektrischen Feldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung

Der zur Beschreibung des absoluten elektrischen Feldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung in (10a) auftauchende Faktor **k** rechtfertigt sich durch den Umstand, dass Meterstäbe, die in Längsrichtung (**x'**-Richtung) bewegt sind, nach der allgemeinen, für räumliche und zeitliche Intervalle (und nicht für Feldstärken) gültigen Lorentztransformation verkürzt sind, was zu einer Vergrößerung der Feldstärkenkomponenten in **y'**- und **z'**-Richtung führt.

Aber selbst ohne Benutzung der allgemeinen Lorentztransformation für räumliche und zeitliche Intervalle gelangt man ohne weitere Annahmen ebenfalls zu einer Vergrößerung der **y**- und **z**-Komponenten des elektrischen Feldes um den Faktor **k**, wenn man nur berücksichtigt, dass sich magnetische und elektrische Felder gleichförmig und geradlinig bewegter Quellen mit endlicher Geschwindigkeit, nämlich mit der Geschwindigkeit **c**, ausbreiten. Die anschauliche geometrische Darstellung bei R.P. Feynman, Lectures on Physics II, Kapitel 21-6, Fig. 21-7, insbesondere Feynmans Gleichung 21.39, ist hier hilfreich: Liegt der Punkt P **(x,y,z,t_0)** in Feynmans Fig. 21-7, für den das "Potential" bestimmt werden soll, genau querab von der momentanen, wirklichen Position der felderzeugenden, entlang der **x**-Achse bewegten elektrischen Ladung, so ist der Ausdruck "**x-vt**" (der Abstand der momentanen, wirklichen Position der Ladung vom Koordinatenursprung ist gleich **vt**) in Feynmans Gleichung 21.39, nämlich in
(13c)

$$\varphi(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-\frac{v^2}{c^2})(y^2+z^2)}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{[(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}})^2+y^2+z^2]^{1/2}}$$

gleich null, und das "Potential" **phi** unterscheidet sich von dem Potential, das von einer an derselben Stelle *ruhenden* Ladung gleicher Menge erzeugt wird, allein durch den zusätzlichen Faktor **k**. Die Ableitung des "Potentials" nach **dy**, die zur elektrischen Feldstärkekomponente in **y**-Richtung führt, ist dann ebenfalls um den Faktor **k** vergrößert. Alle gemessenen Größen sind in (13c) solche, die im Ruhesystem des Labors (in welchem die Ladung entlang der **x**-Achse in Bewegung ist) gemessen werden.

Man beachte jedoch: Stellt man sich um die tatsächliche (und nicht die scheinbare) Momentanposition der (sich entlang der **x**-Achse bewegenden) Punktladung herum eine Kugel mit dem Radius **r** vor, so ist gemäß (13c) auf jedem Punkt der Kugeloberfläche nicht nur das Potential, sondern auch die Ableitung des Potentials nach **r** , d.h., die Feldstärke **E**, überall größer als im Fall der ruhenden Ladung; nur direkt auf **x**-Achse sind die Werte dieselben wie bei einer ruhenden Ladung. Dann aber müsste das geschlossene Oberflächenintegral der Feldstärke, d.h., die Ableitung des "Potential" nach **r**, abweichend vom Gaußschen Gesetz größer als die elektrische Ladung sein.

Zur Wahrung des Gaußschen Gesetzes gelangt man nur dann, wenn man berücksichtigt, dass mitbewegte Meterstäbe, die parallel zur **x**-Achse ausgerichtet sind, verkürzt sind. Dann ist (13c) wie folgt zu korrigieren (siehe E.M. Purcell, Elecricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, Vol. 2, 2. Auflage 1985, Kapitel 5.6, Gleichung 12, Seite 185):
(13d)

$$\varphi(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(\frac{x-vt}{1-v^2/c^2})^2+(1-\frac{v^2}{c^2})(y^2+z^2)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{[(\frac{x-vt}{(1-v^2/c^2)^{3/2}})^2+y^2+z^2]^{1/2}}$$

Bildet man für Punkte, die auf der **x**-Achse liegen, die Ableitung des Potentials nach **x** (auf der **x**-Achse gilt: **dr=dx**), so erhält man aus (13d) eine elektrische Feldstärke in **x**-Richtung, die um den Faktor **1/k²** kleiner ist als diejenige Feldstärke, die sich ergäbe, wenn die Ladung an ihrer Momentanposition ruhen würde. Andererseits ist diese elektrische Feldstärke, die im gestrichenen Ruhesystem der Ladung vom Kehrwert des Quadrats des Abstands abhängt, wegen der Verkürzung der in **x**-Richtung orientierten Meterstäbe (um den Faktor **1/k**) genauso dieselbe, die auch im gestrichenen System an dieser Stelle gemessen wird.

Eben dadurch wird die oben unterstellte Annahme bestätigt, wonach sämtliche Feldlinien des in (12) beschriebenen Gesamtfeldes [und damit des in den physikalisch korrekten Gleichung (10a) auftauchenden absoluten elektrischen Feldes $\mathbf{E'_{abs}}$ der geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung] in Richtung der tatsächlichen Momentanposition der bewegten Ladung weisen. Ist die **x'**-Komponente dieses Feldes, nämlich $\mathbf{E'_x}$, an einem Raumpunkt P' genauso groß wie die im ungestrichenen Ruhesystem der Ladung an derselben Stelle gemessene **x**-Komponente dieses Feldes, ist aber sowohl die **y'**-Komponente des Feldes als auch die **z'**-Komponente gegenüber den ungestrichenen Komponenten um den Faktor **k** vergrößert, so scheint das resultierende gestrichene Feld anders als das ungestrichene Feld *nicht* überall in Richtung der Momentanposition der Ladung zu weisen. Diese erste Vermutung täuscht jedoch, denn zum Ausgleich der Verstärkung der **y'**- und **z'**-Komponenten des in (12) beschriebenen gestrichenen Feldes ist die **x'**-Komponente des *Abstandes des Punktes P' von der Momentanposition der Ladung* im Vergleich mit der **x**-Komponente dieses Abstandes um den Faktor **1/k** verkürzt ist (siehe nur E.M. Purcell, Elecricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, Vol. 2, 2. Auflage 1985, Kapitel 5.6, Fig. 5.12, Seite 184).

4.5) Die Wirbelhaftigkeit des absoluten elektrischen Feldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung

Bei Betrachtung von (13d) fällt auf, dass das darin beschriebene "Potential" **phi** dasselbe ist, das sich ergibt, wenn man sich vorstellt, die bewegte Ladung sei durch eine ruhende, dabei aber mengenmäßig vergrößerte Ladung ersetzt worden. Denn (13d) kann umgewandelt werden in:
(13e)

$$\varphi(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{[(\frac{x-vt}{(1-v^2/c^2)^{3/2}})^2+y^2+z^2]^{1/2}} = \frac{kn(x,y,z,t)\ q}{4\pi\varepsilon_0[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{q_{eff}(x,y,z,t)}{4\pi\varepsilon_0[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{1/2}}$$

Die in der zweiten Zeile auftauchende, von **x,y,z** und **t** abhängige Größe $\mathbf{q_{eff}}$ ist die Menge der bewegten effektiven Ladung. Ihr Wert dann am größten, wenn **x-vt** gleich null ist, **x** und **vt** somit gleich groß sind (dann ist die wirkliche Momentanposition der Ladung genau querab vom Beobachtungspunkt P). Die Größe **n**, die ebenfalls von **x,y,z** und **t** abhängt, ist ein dimensionsloser Faktor, der Werte zwischen $\mathbf{1/k^3}$ (bei Punkten, die auf der **x**-Achse belegen sind) und eins (querab von der wirklichen Momentanposition der Ladung) annimmt.

Bei gegebenem Momentanabstand des Punktes vom der bewegten Ladung ist der Wert der effektiven Ladung dann am größten, wenn **x-vt** gleich null ist, die Ladung also genau querab liegt. Ist **x** hingegen bei gegebenem Abstand des Punktes P von der Momentanposition der bewegten Ladung, d.h., bei gegebenem $\mathbf{[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{1/2}}$, von **vt** verschieden, so ist der Wert der ersten eckigen Klammer in der ersten Zeile von (13e) vergrößert und damit sowohl **n** als auch der Wert der effektiven Ladung $\mathbf{q_{eff}}$ verkleinert.

Bestimmt man an Punkten, die entweder auf der **x**-Achse oder auf einer Geraden liegen, welche die **x**-Achse an der Momentanposition der Ladung rechtwinklig kreuzt, jeweils die elektrische Feldstärke, so spielt die prinzipielle Veränderlichkeit der Menge der effektiven Ladung keine Rolle, da diese Ladungsmenge bei den dann gebildeten partiellen Ableitungen des Potentials ausnahmsweise unverändert bleibt.

Bei der Bildung eines geschlossenen makroskopischen Wegintegrals des “Potentials” (zu einem gewählten Zeitpunkt **t**), bei dem der Integrationspfad nicht ausschließlich auf den genannten Geraden verläuft, liegen die Dinge jedoch anders: Hier verändert sich die Größe der effektiven Ladung. Verändert sich aber die fiktive, ruhende Ladungsmenge auf dem Integrationspfad, so kann von einem “Potential” gar nicht gesprochen werden, da der Potentialunterschied zwischen zwei Punkten vom Weg abhängig sein kann.

4.6) Die korrekte Beschreibung des elektrischen Gesamtfeldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung

Die Gleichung (13), die die herkömmliche Beschreibung des relativistischen elektrischen Feldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung enthält, stimmt jedoch nicht mit der korrekten Gleichung (10a) oder (11) überein. Sie berücksichtigt nicht, dass ein relativistisches elektrisches Feld der bewegten Ladung nicht nur durch die Lorentzkontraktion erzeugt wird, sondern ein elementares Phänomen eigener Art darstellt (aus dem sich, wenn positive und negative Ladungen getrennt betrachtet werden, das bekannte relativistische elektrische Feld eines bewegten, eisenkernlosen Elektromagneten zusammensetzt).

Gemäß (11) lautet die korrekte Beschreibung des relativistischen elektrischen Feldes $\mathbf{E'}_{rel}$ in der Komponentenschreibweise somit ($\mathbf{E}_y$ und $\mathbf{E}_z$ sind auch hier die Komponenten des absoluten, nämlich elektrostatischen Feldes, dessen Rotation im ungestrichenen System, in welchem die Ladung ruht, überall null ist; der Index "**contr**" ist bei den ungestrichenen Komponenten von **E** weggelassen worden, da die Verkürzung von Meterstäben, die im ungestrichenen System ruhen, durch den Faktor **k** hinreichend deutlich wird):
(13a)

$$\vec{E}'_{rel} = \frac{v^2}{c^2} E'_y \vec{e}'_y + \frac{v^2}{c^2} E'_z \vec{e}'_z = k \frac{v^2}{c^2} E_y \vec{e}'_y + k \frac{v^2}{c^2} E_z \vec{e}'_z$$

Die Lehrbuchmeinung postuliert für die Stärke des relativistischen elektrischen Feldes der bewegten Ladung in der **y**- oder **z**-Richtung somit einen Wert, der (gemessen an der korrekten Gl. 13a) zu gering ist. Genauer: Der Quotient (13a)/(13) der beiden rechten Seiten der Gleichungen ist:
(13b)

$$\frac{v^2}{c^2(1 - \frac{1}{k})}$$

Bei kleinem **v** (wenn **k** nur wenig größer als eins ist) kann der Quotient deutlich größer als eins sein.

Der auf Grundlage von (5) und (11) gewonnene, physikalisch korrekte Ausdruck des totalen elektrischen Feldes der geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung ist (hierbei ist **v'=-v**):
(14)

$$\vec{E}'_{total} = \vec{E}_{abs-contr} + \vec{E}'_{rel} = \vec{E}_{abs-contr} - \vec{v}' \times \vec{B}' = \vec{E}_{abs-contr} - \vec{v}' \times (k \frac{\vec{v}' \times \vec{E}'_{abs}}{c^2})$$

$$= \vec{E}_{abs-contr} + \vec{v} \times (\frac{\vec{v}' \times \vec{E}'_{abs}}{c^2}) = \vec{E}_{abs-contr} - \vec{v} \times (k \frac{\vec{v} \times \vec{E}_{abs}}{c^2})$$

In ausführlicher Schreibweise lautet die Gleichung (14):
(15)

$$\vec{E}'_{total} = \vec{E}_{abs-contr} + \vec{E}'_{rel} = (E_x \vec{e}'_x + E_y \vec{e}'_y + E_z \vec{e}'_z)_{contr} + (k \frac{v^2}{c^2} E_y \vec{e}'_y + k \frac{v^2}{c^2} E_z \vec{e}'_z)$$

$$= E_{x-contr} \vec{e}'_x + (k \frac{v^2}{c^2} + 1) E_y \vec{e}'_y + (k \frac{v^2}{c^2} + 1) E_z \vec{e}'_z$$

Der in der herkömmlichen Lorentztransformation und in der ersten Zeile von (12) auftauchende Faktor **k** ist somit durch den Faktor $\mathbf{(kv^2/c^2+1)}$ zu ersetzen.

4.7) Rotation und Divergenz des wirklichen elektrischen Gesamtfeldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung

aa) Die Rotation des in (15) korrekt beschriebenen Feldes $\mathbf{E'}_{\mathbf{total}}$ ist nicht überall null. Um dies zu erkennen, bilde man das oben bei Benutzung von (12) beschriebene, geschlossene (rechteckige) Wegintegral des Feldes $\mathbf{E'}_{\mathbf{total}}$ nunmehr bei Benutzung von (15).

Dies soll näher betrachtet werden: Ersetzt man das relativistische **B**-Feld der geradlinig und gleichförmig entlang der **x**-Achse bewegten elektrischen Ladung durch das Vektorprodukt aus **v/c²** mal **E**, so gilt (nach den Regeln der Vektorrechnung) für die Ableitung nach der Zeit:

$$\frac{\delta \vec{B}}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}\right) = \frac{\delta}{c^2 \delta t}(v_y E_z - v_z E_y)\vec{e}_x + \frac{\delta}{c^2 \delta t}(v_z E_x - v_x E_z)\vec{e}_y + \frac{\delta}{c^2 \delta t}(v_x E_y - v_y E_x)\vec{e}_z$$

Befindet sich ein Beobachter, an dessen Ort **dB/dt** bestimmt werden soll, in der von der **x**- und **y**-Achse aufgespannten Ebene, so vereinfacht sich die Gleichung wegen $\mathbf{v_z=0}$, $\mathbf{dv_z/dt=0}$, $\mathbf{v_y=0}$, $\mathbf{dv_y/dt=0}$, $\mathbf{dv_x/dt=0}$, $\mathbf{dE_z/dt=0}$ wie folgt:

$$\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}(x,y,0) = v_x \frac{\delta E_y}{c^2 \delta t}\, \vec{e}_z = -\vec{\nabla} \times \vec{E}_{total}$$

Man erkennt: Die Ableitung des Vektors **B** nach der Zeit und damit – gemäß dem Maxwell-Faradayschen Gesetz – die Rotation des elektrischen Gesamtfeldes der geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung ist keineswegs an jedem Ort in der genannten Ebene null (die **y**-Komponente des elektrischen Feldes kann sich ja verändern), während die Rotation des von einer *unbeweglichen* elektrischen Ladung erzeugten elektrischen Feldes durchaus überall null ist.

bb) Was die Frage der *Divergenz* des in (15) korrekt beschriebenen Feldes $\mathbf{E'}_{\mathbf{total}}$ betrifft, so kehre man in seiner Vorstellung zu den oben beschriebenen, mitbewegten Rohren zurück, in deren Zentrum die im gestrichenen System bewegte elektrische Ladung sitzt. Die Länge eines jeden Rohres wird durch (15) um den Faktor **k** verkürzt; die Stärke des elektrischen Gesamtfeldes nimmt jedoch um einen Faktor zu, der größer als **k**, nämlich gleich **kv²/c² +1**, ist.

Beweis für **kv²/c²+1>k**: Wenn – nach Gleichung (13b) – das in Gleichung (13a) korrekt beschriebene relativistische Feld **kv²/c² E** größer als das in Gleichung (13) inkorrekt beschriebene relativistische Feld **(k-1)E** ist, so muss auch die Summe **kv²/c² E + E=(kv²/c² +1)E** größer als die Summe **(k-1)E +E= kE** sein.

Folglich ist der elektrische Fluss (Flächenintegral der elektrischen Feldstärke) durch eine Rohrwand gegenüber dem Zustand einer ruhenden Ladung vergrößert. Damit ist das Gaußsche Gesetz für das elektrische Gesamtfeld nicht länger gewahrt, denn die Divergenz des Feldes $\mathbf{E'}_{\mathbf{total}}$ ist nicht überall gleich der elektrischen Ladungsdichte.

4.8) Die Bestimmung der Größe von elektrischen Scheinladungen und magnetischen Monopolen, nämlich des Betrags des geschlossenen Oberflächenintegrals desjenigen Partialfeldes, das nicht dem Gaußschen Gesetz gehorcht

aa) Quantitativ gilt: Dasjenige Partialfeld des Gesamtfeldes, dessen Linien nicht in der elektrischen Ladung sondern im "Nichts" enden oder beginnen und deshalb als $\mathbf{E'}_{\mathbf{scheinladung}}$ bezeichnet werden soll, ist gleich der Differenz zwischen dem in (15) korrekt beschriebenen Gesamtfeld und dem in (12) als Gesamtfeld inkorrekt beschriebenen Feld [das mit dem in korrekter Weise in (10a) auftauchenden, im Ruhesystem des Labors existenten Feld $\mathbf{E'}_{\mathbf{abs}}$ identisch ist], denn die Divergenz des letzteren Feldes verhält sich ja, wie gerade festgestellt, so, dass die Linien *dieses* Feldes in der Ladung enden oder beginnen und ihr geschlossenes Oberflächenintegral quantitativ das Gaußsche Gesetz erfüllt. Die Differenz zwischen (15) und (12) und damit das elektrische Feld $\mathbf{E'}_{\mathbf{scheinladung}}$, dessen Linien nicht in elektrischen Ladungen enden oder beginnen (sondern im leeren Raum), ist gleich:
(15a)

$$\vec{E}'_{scheinladung} = E_y(k-1)\left[\frac{v^2}{c^2(1-\frac{1}{k})} - 1\right]\vec{e}'_y + E_z(k-1)\left[\frac{v^2}{c^2(1-\frac{1}{k})} - 1\right]\vec{e}'_z$$

$$= E_y(1-\frac{1}{k})\,\vec{e}'_y + E_z(1-\frac{1}{k})\,\vec{e}'_z$$

Beweis für die Vereinfachung der ersten Zeile durch die zweite Zeile: Setzt man
(15b)

$$(k-1)\left[\frac{v^2}{c^2(1-\frac{1}{k})} - 1\right] = 1 - \frac{1}{k}$$

so erhält man mittels Division beider Seiten durch **(k-1)**
(15c)

$$\frac{v^2}{c^2(1-\frac{1}{k})} - 1 = \frac{1-\frac{1}{k}}{k-1} = \frac{k(1-\frac{1}{k})}{k(k-1)} = \frac{k-1}{k(k-1)} = \frac{1}{k}$$

Multipliziert man die ganz linke und die ganz rechte Seite von (15c) mit **k** und setzt man **c=1** (so dass **v** dimensionslos als Bruchteil von **c** ausgedrückt wird) so erhält man
(15d)

$$\frac{kv^2}{1-\frac{1}{k}} - k = \frac{k^2v^2}{k-1} - k = \frac{k^2v^2 - k(k-1)}{k-1} = \frac{k^2v^2 - k^2 + k}{k-1} = 1$$

Multiplikation der letzten beiden Seiten von (15d) mit **(k-1)** und die stellenweise Ersetzung von **k** durch **$(1-v^2)^{-1/2}$** ergibt
(15e)

$$k^2v^2 - k^2 + k = \frac{v^2}{1-v^2} - \frac{1}{1-v^2} + k = \frac{v^2-1}{1-v^2} + k = k - 1$$

Multiplikation der beiden letzten Seiten von (15e) mit **-1** führt zu
(15f)

$$\frac{1-v^2}{1-v^2} - k = 1 - k$$

Damit ist (15b) bewiesen.

bb) Für das Oberflächenintegral von **$E'_{scheinladung}$** über die gesamte Mantelfläche eines im gestrichenen System des Labors ruhenden, gedachten Zylinders unendlicher Länge und hinreichend großen Durchmessers, entlang dessen Zentrallinie die Ladung in Bewegung ist, gilt:
(15g)

$$\oint_{Zylinderfläche} \vec{E}'_{scheinladung} \cdot d\vec{A}' = [1 - \frac{1}{k}]\,\frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{q_{schein}}{\varepsilon_0}$$

Die Größe **q** ist die wirkliche elektrische Ladung, **q_{schein}** ist die Größe der scheinbaren Ladung.

cc) Um sich das Feld **$E'_{scheinladung}$** zu veranschaulichen, stelle man sich in einer Momentaufnahme das lorentzkomprimierte, gewöhnliche elektrostatische Feld der (kugelförmigen) Ladung vor. Dort, wo die Feldlinien die gedachte Mantelfläche des gedachten, sehr langen Zylinders von innen nach außen durchstoßen, stelle man sich jede Feldlinie wie bei einer Brechung abgeknickt vor, und zwar so, dass jede Feldlinie nach Durchstoßen der Mantelfläche des Zylinders parallel zur Flächennormalen verläuft. Die Zahl der durchdringenden Feldlinien pro Einheit der Mantelfläche reduziert man anschließend überall durch Hinzufügung des Faktors

$$1 - \frac{1}{k(v)} = 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dadurch erhält man das Feld **$E'_{scheinladung}$** , wie es sich unmittelbar außerhalb der Mantelfläche des vorgestellten Zylinders zeigt. (Das Vorzeichen der Wurzel muss positiv sein, da der Wert des Faktors bei **v=0** verschwinden muss.)

Man beachte: Trägt man den Faktor (**1-1/k**) als Funktion der Geschwindigkeit **v/c** (die zwischen **-1** und **+1** liegen kann) in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein (mit dem Faktorwert als Ordinate), so erhält man eine halbkreisförmige Funktionskurve, wobei die Ordinate die Symmetrieachse des Halbkreises bildet. Für **v=0** beträgt der Wert des Faktors null (kleinster Wert), für **v= +-1** beträgt der Wert des Faktors **+1** (größter Wert).

Verkleinert man den Durchmesser des Zylinders, so reduziert sich die Zahl und Dichte der so beschriebenen Linien des Feldes $\mathbf{E'}_{\mathbf{scheinladung}}$. Sie verlaufen immer streng senkrecht zur Bewegungsrichtung der Ladung (d.h., senkrecht zur **x'**-Achse) und haben ihre Anfangs- und Endpunkte im freien Raum außerhalb der Ladung.

dd) Gleichung (15) lässt sich nach den obigen Ausführungen auch wie folgt formulieren:
(15h)

$$\vec{E}'_{total} = E_x\,\vec{e}'_x + E_y[k + (1-\tfrac{1}{k})]\vec{e}'_y + E_z[k + (1-\tfrac{1}{k})]\vec{e}'_z$$

$$= (E_x\vec{e}'_x + kE_y\vec{e}'_y + kE_z\vec{e}'_z) + [E_y(1-\tfrac{1}{k})]\vec{e}'_y + E_z(1-\tfrac{1}{k})]\vec{e}'_z] = \vec{E}'_{abs} + \vec{E}'_{scheinladung}$$

Proberechnung (zum Beweis der Äquivalenz von Gleichung 15h und Gleichung 15):
(15i)

$$k + (1 - \tfrac{1}{k}) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + 1 - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 + \frac{1 - (1-v^2/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= 1 + \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1 + k\,\frac{v^2}{c^2} = k\,\frac{v^2}{c^2} + 1$$

ee) Wegen der gleichen Feldstruktur gilt Entsprechendes für das *magnetische* Gesamtfeld des geradlinig und gleichförmig bewegten absoluten Magnetpols: Das magnetische Gesamtfeld besitzt außerhalb des Magnetpols Quellen oder Senken im freien Raum! Diese Quellen oder Senken stellen nichts anderes als magnetische Monopole dar. Die Gleichungen (15a) und (15b) gelten weiterhin; man muss lediglich **E** durch **B** und die Dielektrizitätskonstante des Vakuums durch eine passende andere Konstante ersetzen. Gleichung (15a) gibt dann die Feldstärke des magnetischen Monopols an! Anders ausgedrückt:
(15i)

$$\vec{B}'_{monopol} = B_y(1 - \frac{1}{k})\,\vec{e}'_y + B_z(1 - \frac{1}{k})\,\vec{e}'_z$$

5) Die Lösung einer Abwandlung des Trouton-Noble-Paradoxons

Erst durch die Gleichungen (15) und (11) gelingt die Auflösung einer Abwandlung des Trouton-Noble-Paradoxons: Zwei gleich gebaute Kunststoffrohre, in welchem sich jeweils zwei mit Elektrizität desselben Vorzeichens geladene Kugeln befinden sollen, seien so beschaffen, dass die eine Kugel jeweils fest mit dem Rohr verbunden ist, während die andere Kugel sich jeweils frei im jeweiligen Rohr bewegen kann. Beide Rohre seien quer zur **x'**-Achse, nämlich in **y'**-Richtung, ausgerichtet und sollen im gestrichenen System des Labors geradlinig-gleichförmig mit entgegengesetzt-gleichen Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit parallel zur **x'**-Achse, also in positiver bzw. negativer **x'**-Richtung, bewegt werden.

Im gestrichenen System des Labors soll sich zudem entlang der **x'**-Achse eine dort ruhende Wand befinden, die in Richtung ihrer beiden Flächennormalen, nämlich in **y'**-Richtung, verschoben werden kann. Die beweglichen Kugeln der beiden genannten Rohre sollen, wenn sie sich in der Nähe des jeweiligen Rohrendes aufhalten, reibungsfrei an der Wand entlangschleifen können. Die Kugel des einen Rohres soll dabei an der einen Seite der Wand, die des anderen Rohres an der anderen Seite der Wand entlangschleifen.

Versetzt man sich in das Ruhesystem eines der beiden Rohre und nähme man an, dass in dem anderen (zweiten) Rohr die auf die dortige bewegliche Kugel ausgeübte Querkraft (Druckkraft) aufgrund der Geschwindigkeit, die das andere (zweite) Rohr im Ruhesystem des ersten Rohres besitzt, größer oder kleiner als die auf die eigene bewegliche Kugel wirkende Kraft ist (die der Einfachheit halber 1 N betragen soll), so müsste sich die Wand verschieben wollen. Nimmt man z.B. an, die große Geschwindigkeit würde zu einer *Verringerung* der Querkraft führen, so müsste sich, im Ruhesystem des ersten Rohres betrachtet, die Wand weg vom Ende des eigenen Rohres verschieben wollen. Wenn das Relativitätsprinzip Gültigkeit besitzen soll, so müsste im Ruhesystem des anderen (zweiten) Rohres jedoch dasselbe gelten; d.h., im Ruhesystem des anderen (zweiten) Rohres müsste sich die Wand dann genau in der entgegengesetzten Richtung verschieben wollen.

Die Wand kann sich aber nur in einer der beiden Richtungen verschieben wollen. Anders als bei der relativistischen Längenkontraktion und Zeitdilatation könnten Beobachter in beiden Systemen hier nicht gleichartige Beobachtungen machen.

Das Relativitätsprinzip verlangt somit, dass die Querkraft, die aus Sicht eines der beiden Ruhesysteme der Rohre auf die bewegliche Kugel des anderen, bewegten Rohres wirkt, genauso groß ist wie die Querkraft, die auf die eigene bewegliche Kugel (im unbeweglichen Rohr) wirkt. Damit verlangt das Relativitätsprinzip gleichzeitig, dass die Kraft, die auf ein- und dieselbe Kugel wirkt (sei es die bewegliche Kugel im ersten oder im zweiten Rohr), in beiden Ruhesystemen der Rohre gleich groß (1 N) gemessen wird.

Eben dies wird durch Gl. (15) gewährleistet. Denn aus (15) und (11) ergibt sich, in gleicher Weise wie beim oben beschriebenen Trouton-Noble-Paradoxon (siehe Gleichung 11d), für die auf die bewegte Kugel wirkende Kraft (das gestrichene System ist jetzt das Ruhesystem

eines der beiden Rohre; das ungestrichene System ist das Ruhesystem des anderen, im ungestrichenen System bewegten Rohres, in welchem die dort wirkende Kraft, die von der dort beweglichen Kugel erfahren wird, bestimmt werden soll):
(16)

$$F_y^{\prime} = qE_{total_y}^{\prime} + F_{lorentz}^{\prime} = qE_{y-contr} + qE_{y_{rel}}^{\prime} + F_{lorentz}^{\prime}$$

$$= q(E_{y-contr} + E_{y_{rel}}^{\prime} - k\,\frac{E_y}{c^2}\,v^2) = q(E_{y-contr} + k\,\frac{E_y}{c^2}\,v^2 - k\,\frac{E_y}{c^2}\,v^2) = qE_{y-contr} = F_y$$

Die von einer einzelnen Kugel auf die Wand ausgeübte Kraft ist somit in beiden System gleich! Dadurch wird das Relativitätsprinzip gerettet.

(Man beachte allerdings: Hierdurch ist keineswegs impliziert, dass die Kraft in der Speziellen Relativitätstheorie überall und immer eine Erhaltungsgröße darstellt.)

6) Herleitung der Lorentzkraft aus den Maxwellschen Gleichungen und dem allgemeinen Relativitätspostulat

Gleichzeitig kann die Lorentzkraft **q(v x B)** nunmehr aus den Maxwellschen Gleichungen und dem Relativitätsprinzip abgeleitet werden. Dazu kehre man zum Trouton-Noble-Paradoxon in der Erscheinungsform der beiden sich ein Kopf-an-Kopf-Rennen liefernden Kugeln zurück. Durch das relativistische elektrische Feld entstand eine Zusatzkraft, welche die abstoßende elektrostatische Kraft zwischen den beiden Kugeln verstärkte und dadurch die nur im Ruhesystem des nicht mitbewegten Beobachters vorhandene Lorentzkraft kompensierte. Eben dadurch wurde das Trouton-Noble-Paradoxon gelöst.

Man kann den “Spieß aber auch umdrehen”: Man lasse ein scheinbares Paradoxon dadurch entstehen, dass man zunächst so tut, als wenn die Lorentzkraft gar nicht bekannt wäre. Dann nämlich existiert im Ruhesystem des nicht mitbewegten Beobachters eine vom relativistischen elektrischen Feld erzeugte Zusatzkraft, mit der sich die beiden Kugeln gegenseitig abstoßen. Da die Zusatzkraft im Ruhesystem der beiden Kugeln nicht existiert, die Kraft aber, wie gerade oben gezeigt wurde, hier eine Erhaltungsgröße darstellt, die in beiden Systemen dieselbe sein muss, muss es im Ruhesystem des nicht mitbewegten Beobachters (und *nur* dort) eine weitere Kraft geben, die genauso stark wie die vom relativistischen elektrischen Feld ausgeübte Kraft ist, dieser Kraft aber genau entgegengesetzt ist. Mit anderen Worten: Aus den Maxwellschen Gleichungen und dem allgemeinen Relativitätspostulat folgt eine Kraft **q(v x B)**, die Lorentzkraft genannt wird.

7) Das relativistische elektrische Feld einer gleichförmig und geradlinig bewegten Ladung als Bestandteil des Feldes -dA/dt

Die Übereinstimmung der Gleichungen (6) und (11) mit den Maxwellschen Gleichungen ist bereits oben festgestellt worden. Dennoch soll das Verhältnis zwischen dem relativistischen elektrischen Feld und den Maxwellschen Gleichungen, insbesondere das Verhältnis zum Feld **dA/dt**, im Folgenden noch weiter vertieft werden.

7.1) Die Wirbelfreiheit des Gradienten des elektrostatischen Potentials nach den Maxwellschen Gesetzen

a) Aus den Maxwellschen Gleichungen für das elektrische Feld der im gestrichenen System bewegten Ladung kann man die folgende Beziehung ableiten (siehe nur *R.P. Feynman*, Lectures on Physics II , Kapitel 21-3, S. 21-5, sämtliche Größen sind in den Feynmanschen Gleichungen ungestrichen und werden im Folgenden durch gestrichene Größen ersetzt; das ungestrichene System ist nach der nunmehr benutzten Konvention dasjenige System, in welchem die Ladung ruht):
(17)

$$\vec{E}'_{total} = -\vec{\nabla}\varphi_{contr} - \frac{\delta\vec{A}'}{\delta t'}$$

Mit **phi** ist das von der Ladung erzeugte Potential gemeint. Der Vektor **A'** ist das Vektorpotential. Dieses ist dadurch definiert, dass seine Rotation gleich dem **B'**-Magnetfeld ist (die Gleichung 17 findet sich bereits bei *J.C.Maxwell*, Treatise on Electricity and Magnetism, Band 2, Dover Publ. 1954, Abschnitt 599, S. 241, Gleichung 10, wo allerdings in nicht korrekter Weise auch noch die Lorentzkraft pro Ladungseinheit, nämlich das Vektorprodukt aus Geschwindigkeit der Probeladung und dem äußeren **B**-Magnetfeld, als Summand aufgeführt ist).

Man gelangt zu (17), indem man in der Faradayschen-Maxwellschen Induktionsgleichung
(18)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}'_{total} = -\frac{\delta\vec{B}'}{\delta t'}$$

den divergenzlosen Vektor **B'** durch die ebenfalls divergenzlose Rotation einer anderen Größe, nämlich des Vektorpotentials **A'**, ersetzt. Dann ergibt sich:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}'_{total} = -\frac{\delta(\vec{\nabla} \times \vec{A}')}{\delta t'}$$

Mit Hilfe des Schwarzschen Theorems der Austauschbarkeit der Reihenfolge von partiellen Differentiationen kann diese Gleichung wie folgt umgeschrieben werden:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}'_{total} = -\vec{\nabla} \times \frac{\delta\vec{A}'}{\delta t'} = \frac{-\delta(\vec{\nabla} \times \vec{A}')}{\delta t'}$$

Daraus wiederum ergibt sich:

$$\vec{E}'_{total} = -\frac{\delta\vec{A}'}{\delta t'} + \vec{\nabla}C_{contr}$$

Die Größe **C**(**x,y,z,t**) ist ein unbestimmtes Skalarfeld. Die Rotation des Gradienten eines jeden skalaren Feldes ist notwendigerweise null. Ersetzt man **C** durch das negative elektrostatische Potential einer Ladung, so gelangt man schließlich zu (17).

b) Der Schritt von (18) zu (17) ist aber nur berechtigt (dies sei betont), wenn die Rotation des Gradienten von **phi**, d.h., die Rotation des elektrostatischen, von der (bewegten) Ladung erzeugten Feldes, gleich null ist. Wäre die Rotation des Gradienten von **phi** von null verschieden, so wäre (17) nicht gültig: Die Rotation beider Seiten von (17) würde dann zu einer Gleichung führen, die zu der Maxwellschen Grundgleichung (18) im Widerspruch stünde (indem auf der rechten Seite von Gl. 18 ein positiver oder negativer Summand hinzuzufügen wäre). Im Übrigen könnte man dann gar nicht von einem "Potential" sprechen, da ja die Arbeit, die bei Verbringung einer Probeladung zu einem weit entfernten Referenzpunkt aufzubringen wäre, vom gewählten Weg abhinge.

Ganz besonders deutlich wird dies, wenn die Maxwellsche Gleichung (18) mit Hilfe des Schwarzschen Theorems wie folgt umformuliert wird:
(19)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}'_{total} + \frac{\delta\vec{B}'}{\delta t'} = \vec{\nabla} \times \vec{E}'_{total} + \frac{\delta(\vec{\nabla} \times \vec{A}')}{\delta t'} = \vec{\nabla} \times (\vec{E}'_{total} + \frac{\delta\vec{A}'}{\delta t'}) = 0$$

Unter Heranziehung von Gleichung (17) verwandelt sich (19) in (siehe auch *R.P. Feynman*, Lectures on Physics II, Kapitel 18-6, Gleichung 18.17):
(20)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}'_{total} + \frac{\delta\vec{A}'}{\delta t'}) = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}\varphi_{contr}) = 0$$

Mit anderen Worten: Die Rotation des Gradienten von **phi** ist überall null.

Tatsächlich ist das durch die Lorentz-Transformation (für elektrische und magnetische Felder) beschriebene elektrische Feld einer mit relativistischer Geschwindigkeit bewegten Ladung nicht konservativ (wie bereits oben ausgeführt), d.h., seine Rotation ist aufgrund der Lorentzkontraktion des elektrischen Feldes keineswegs null (egal, ob man die herkömmliche Lorentztransformation oder eine korrigierte Lorentztransformation benutzt). Bei diesem Feld kann es sich folglich nicht um den Gradienten eines Potentials handeln. Auch in der Literatur wird das resultierende Gesamtfeld $\mathbf{E'}_{\mathbf{total}}$ einer geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung zu Recht ausdrücklich als nichtkonservativ, d.h., als nicht wirbelfrei beschrieben (*E. M. Purcell*, Berkeley Physics Course II, Electricity and Magnetism, New York 1965, Kapitel

5.6, S. 161: *"Zudem handelt es sich um ein Feld, das durch keine stationäre Ladungsverteilung, wie auch immer sie beschaffen sein mag, hervorgebracht werden könnte. Denn in diesem Feld ist das Wegintegral von E' nicht über jeden geschlossenen Pfad null."* ; *G. Lehner*, Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker, 6. Auflage 2008, Kapitel 1.10, S. 31: "*Es sei an dieser Stelle noch bemerkt, dass das Feld einer bewegten Ladung nicht wirbelfrei ist.*").

Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wie oben dargestellt, durch geometrische Überlegungen auf der Grundlage des Lienard-Wiechert-Potentials.

7.2) Das Verhältnis zwischen dem relativistischen elektrischen Feld einer bewegten Ladung und dem Vektorpotential

Bevor das Verhältnis von Gl. (11) zu den Maxwellschen Gesetzen im 8. Kapitel noch weiter vertieft wird, soll zunächst das in Gleichung (17) aufgetauchte Vektorpotential näher betrachtet werden.

Ausgangspunkt für die Bestimmung des Vektorpotentials **A'** ist das Amperesche Gesetz in der Form der Maxwellschen Grundgleichung (das gestrichene System ist das System, in welchem die Feldquelle in Bewegung ist; das ungestrichene System ist folglich das System, in welchem die Feldquelle ruht):
(21)

$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}}' = \frac{\vec{\boldsymbol{j}}'}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} + \frac{\delta \vec{\boldsymbol{E}}'}{\delta t'}$$

Definiert man das Vektorpotential **A'** in der bereits genannten Weise:
(22)

$$\vec{\boldsymbol{B}}' = \vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{A}}'$$

so kann (21) verwandelt werden in
(23)

$$c^2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{A}}') = \frac{\vec{\boldsymbol{j}}'}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} + \frac{\delta \vec{\boldsymbol{E}}'}{\delta t'}$$

Legt man ferner fest (Coulomb-Eichbedingung):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}' = 0$$

so kann (23) seinerseits in
(24)

$$c^2\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}') = c^2[\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}') - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{A}'] = c^2(-\vec{\nabla} \cdot \nabla\vec{A}') = \frac{\vec{j}'}{\varepsilon_0} + \frac{\delta\vec{E}'}{\delta t'}$$

verwandelt werden. Für die Divergenz des Gradienten des skalaren Betrags der **x'**-Komponente von **A'** gilt:

$$c^2[-\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}A_x'] = \frac{j_x'}{\varepsilon_0} + (\frac{\delta E'}{\delta t'})_x$$

Entsprechendes gilt für die Komponenten in **y'**- und **z'**-Richtung.

Man erkennt jetzt (was allerdings allgemein bekannt ist): Der Gradient des einzelnen skalaren Komponentenbetrags (**x'**, **y'** oder **z'**) des Vektors **A'** verhält sich mathematisch wie der Gradient des skalaren elektrostatischen Potentials im elektrostatischen Analogfall, d.h., wie die elektrostatische Feldstärke **E'**. Denn ähnlich wie die Divergenz der elektrischen Feldstärke **E'**, d.h., die Divergenz des Gradienten des (skalaren) elektrostatischen Potentials, gemäß dem (in der Form einer der Maxwellschen Grundgleichungen ausgedrückten) Gaußschen Gesetz zur elektrostatischen (skalaren) Volumen-Ladungsdichte führt, führt die Divergenz des Gradienten des **x'**- Komponentenbetrags des Vektors **A'** zum Betrag der **x'**-Komponente der elektrischen Volumen-Stromdichte (unter Einschluss der Verschiebungsstromdichte **dE'/dt'**). Mehr noch: Ähnlich wie die Rotation des elektrostatischen Feldes, d.h., die Rotation des Gradienten des elektrostatischen Potentials, null ist, muss auch die Rotation des vektoriellen Gradienten der skalaren **x**-Komponente des Vektorpotentials null sein, da die Rotation eines jeden Gradienten null ist.

Umgekehrt kann man, wenn die Verteilung der Stromdichte im Raum bekannt ist, die Komponenten der Vektorgröße **A'** in ähnlicher Weise ermitteln, wie man – bei bekannter Verteilung elektrischer Ladung im Raum – das skalare elektrostatische Potential, d.h., die von einer Einheitsladung bei Verbringung (z.B.) in die Unendlichkeit aufzuwendende oder freigesetze Arbeit, bestimmen kann (nämlich mit Hilfe des Coulombschen Gesetzes). Eben aus diesem Grunde wird die Vektorgröße **A'** auch "Vektorpotential" genannt.

Genauer ausgedrückt gilt (der Index 1 bezeichnet den Ort, an dem das Vektorpotential bestimmt werden soll; der Index **k**, der von 2 bis zu der beliebig großen Zahl **n** läuft, bezeichnet das jeweilige differentielle Raumvolumen, in welchem ein Strom fließt):
(25)

$$\vec{A}'(1) = \frac{1}{4\pi c^2}\int_{V'} \frac{\frac{\vec{j}'(k)}{\varepsilon_0} + \frac{\delta\vec{E}'}{\delta t'}(k)}{r_{1k}'}\, dV' + \vec{K}' = \frac{1}{4\pi c^2}\int_{V'} \frac{\frac{j_x'(k)}{\varepsilon_0} + (\frac{\delta E'}{\delta t'})_x(k)}{r_{1k}'}\, \vec{e}_x\, dV'$$

$$+ \frac{1}{4\pi c^2} \int_{V'} \frac{\frac{j_y'(k)}{\varepsilon_0} + (\frac{\delta E'}{\delta t'})_y(k)}{r_{1k}'} \vec{e}_y \, dV' + \frac{1}{4\pi c^2} \int_{V'} \frac{\frac{j_z'(k)}{\varepsilon_0} + (\frac{\delta E'}{\delta t'})_z(k)}{r_{1k}'} \vec{e}_z \, dV' + \vec{K}'$$

K'(x', y', z', t') ist ein unbekannter vektorieller Teil des Vektorpotentials, dessen Rotation jeweils null ist (und der deshalb nichts zum magnetischen **B**-Feld beiträgt). Demgegenüber bezeichnet das *Integral* denjenigen Anteil des Vektorpotentials, dessen Rotation nicht null ist.

7.3) Die Nichterfüllung der Eichbedingung div A = 0 bei Vorhandensein eines relativistischen elektrischen Feldes einer gleichförmig und geradlinig bewegten elektrischen Ladung

Es soll nun der Frage nachgegangen werden, ob die als "Eichbedingung" bezeichnete Bedingung **div A'=0** (Coulomb-Eichbedingung) im Fall einer geradlinig und gleichförmig bewegten Punktladung **q** erfüllt ist.

a) Nach der Maxwell-Ampereschen Gleichung ist die Summe aus konventioneller Stromdichte **j** und der Verschiebungsstromdichte **dE/dt** nichts anderes als die Rotation der **B**-Magnetfeldstärke. Da die Divergenz einer Rotation immer null ist, so muss auch die Divergenz der Summe dieser beiden Stromdichten null sein. Das bedeutet: Fließt in ein unbewegliches Volumenelement mehr Ladung hinein als hinaus, so wird dieser Zufluss durch das geschlossene Oberflächenintegral der Größe **dE/dt** , genauer: durch die Divergenz des Verschiebungsstroms **dE/dt**, numerisch vollständig ausgeglichen. Umgekehrt gilt: Verändert sich bei einem unbeweglichen Volumenelement die Divergenz des Verschiebungsstroms **dE/dt**, so fließt reale Ladung in das Volumenelement hinein oder aus ihm heraus.

Wegen der Divergenzlosigkeit des Gesamtstroms (reale Stromdichte **j** plus Verschiebungsstromdichte **dE/dt**) gilt für die Divergenz des Vektorpotentials (der Ort 1 ist der Ort, für welchen das Vektorpotential **A** bestimmt werden soll; die Orte 2,3... **n** bezeichnen die Lage der Volumenelemente des Raumes, in denen Stromelemente vorhanden sind; die gestrichenen Größen bezeichnen das Bezugssystem des Labors, in dem Ladungen in Bewegung sind):
(26)

$$\nabla \cdot \vec{A}'(1) = \nabla \cdot \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\frac{\vec{j}'(2)}{\varepsilon_0} + \frac{\delta \vec{E}'}{\delta t'}(2)}{r_{12}'} dV_2' + \nabla \cdot \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\frac{\vec{j}'(3)}{\varepsilon_0} + \frac{\delta \vec{E}'}{\delta t'}(3)}{r_{13}'} dV_3' + ...$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2 r_{12}'} \nabla \cdot [\frac{\vec{j}'(2)}{\varepsilon_0} + \frac{\delta \vec{E}'}{\delta t'}(2)] \, dV_2' + \frac{1}{4\pi c^2 r_{13}'} \nabla \cdot [\frac{\vec{j}'(3)}{\varepsilon_0} + \frac{\delta \vec{E}'}{\delta t'}(3)] \, dV_3' + ... = 0$$

Man beachte: Die jeweilige Strecke **r'**$_{12}$ bzw **r'**$_{13}$ usw. wird, ausgehend vom Punkt 1, bei der Bildung der Divergenz ein klein wenig um den Betrag 1/2 **dx'** in positive **x'**-Richtung und anschließend um denselben Betrag in negative **x'**-Richtung parallelverschoben. Das im betrachteten, ein Stromelement enthaltenen Volumenelement liegende Ende der Strecke soll "oberes Streckenende", das am Punkt 1 gelegene Ende der Strecke soll "unteres Streckenende" genannt werden. Ebenso wird diese Strecke im nächsten Schritt ein klein wenig um den Betrag 1/2 **dy'** in positive **y'**-Richtung und anschließend um denselben Betrag in negative **y'**-Richtung parallelverschoben (ausgehend vom Punkt 1). Entsprechendes geschieht schließlich noch in **z'**-Richtung. Bei jeder Parallelverschiebung wird die Differenz der jeweiligen **x'**, **y'** oder **z'**-Komponente des in der eckigen Klammer der unteren Zeile enthaltenen Vektors am oberen Ende der Strecke, d.h., in dem betreffenden Volumenelement, bestimmt. Division des jeweiligen Komponentenwertes durch den Skalar **r'**$_{12}$ bzw **r'**$_{13}$ usw. führt jeweils zum Betrag der **x'**-, **y'** bzw **z'**-Komponente des **A'**-Vektors am Ort 1. Eben dort soll ja die Divergenz eines Vektors bestimmt werden, und eben deshalb ist das untere Ende der Strecke – ausgehend vom Punkt 1 – jeweils um den Betrag 1/2 **dx'**, 1/2 **dy'** und 1/2 **dz'** in der jeweiligen Richtung zu verschieben. Die skalare Größe **r'** ist bei jedem Volumenelement jeweils eine Konstante und kann deshalb (wie in der zweiten Zeile geschehen) vor den Nabla-Operator gezogen werden.

Indem die Divergenz jedes einzelnen, jeweils in einer eckigen Klammer der zweiten Zeile enthaltenen Teilvektors als Konsequenz des Maxwell-Ampereschen Gesetzes null ist, ist die Gesamtsumme und damit die Divergenz von **A'** an jeder Stelle des Raumes null.

Ersetzt man im Fall einer bewegten einzelnen Ladung die Stromdichte **j'** durch das Produkt der räumlichen Ladungsdichte **rho** mit der Geschwindigkeit **v'**, so ändert sich an der Nulldivergenz des Vektorpotentials nichts. Vielmehr gilt:
(27)

$$\nabla \cdot \vec{A}'(1) = \nabla \cdot \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\dfrac{\rho \vec{v}'(2)}{\varepsilon_0} + \dfrac{\delta \vec{E}'}{\delta t'}(2)}{r'_{12}} \, dV'_2 + \nabla \cdot \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\dfrac{\rho \vec{v}'(3)}{\varepsilon_0} + \dfrac{\delta \vec{E}'}{\delta t'}(3)}{r'_{13}} \, dV'_3 + \ldots$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2 r'_{12}} \nabla \cdot \left[\frac{\rho \vec{v}'(2)}{\varepsilon_0} + \frac{\delta \vec{E}'}{\delta t'}(2)\right] dV'_2 + \frac{1}{4\pi c^2 r'_{13}} \nabla \cdot \left[\frac{\rho \vec{v}'(3)}{\varepsilon_0} + \frac{\delta \vec{E}'}{\delta t'}(3)\right] dV'_3 + \ldots = 0$$

Somit ist die Bedingung **div A'=0** erfüllt.

Anders ausgedrückt: Die Eichbedingung **div A'=0** ist nicht nur bei geschlossenen Leitungsströmen, sondern aufgrund der Geltung des Ampere-Maxwellschen Gesetzes auch bei der Bewegung einer einzelnen elektrischen Ladung erfüllt. Anders formuliert: Die Eichbedingung **div A'=0** ist dann erfüllt, wenn das Prinzip der (aus dem Maxwell-Ampereschen Gesetz abgeleiteten) Divergenzlosigkeit des aus realem Strom und Verschiebungsstrom bestehenden Gesamtstroms außerhalb von Ladungen Gültigkeit besitzt (siehe bereits A. Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität, 1. Auflage, Leipzig 1894, S. 405: "*Falls div* [des aus Leitungsstrom und Verschiebungsstrom bestehenden Gesamtstroms] *tau = 0 , ist div A= 0.*").

Man beachte zudem: Geht es nicht um das Feld **-dA'/dt**, sondern um die *Rotation* von **A'**, d.h., um die Bestimmung des magnetischen **B'**-Feldes (im Vakuum), so spielt der Verschiebungsstrom **dE'/dt** praktisch keine Rolle, da das von diesem erzeugte Vektorpotential **A'** ähnlich wie ein elektrostatisches Feld praktisch immer und überall wirbelfrei ist, solange die Frequenz der Änderung der Felder nicht zu hoch ist.

b) Die Eichbedingung **div A'=0** ist allerdings dann nicht erfüllt, wenn das elektrische Feld $\mathbf{E'}_{\mathbf{scheinladung}}$ der geradlinig und gleichförmig bewegten, einzelnen elektrischen Ladung als Bestandteil des Gesamtfelds $\mathbf{E'}_{\mathbf{total}}$ ins Spiel kommt und das Maxwell-Amperesche Gesetz für das Feld $\mathbf{E'}_{\mathbf{total}}$ nicht mehr gilt. Das bedeutet: Sie ist nur solange erfüllt, wie unter **E'** in (25) bis (27) allein das qualitativ absolute elektrostatische Feld der einzelnen Ladung verstanden wird (ein durch Beschleunigung von Ladung entstandenes elektrisches Feld, das an sich ebenfalls Bestandteil von $\mathbf{E'}_{\mathbf{total}}$ ist, existiert im hier betrachteten Fall voraussetzungsgemäß nicht). Denn, wie oben festgestellt, besitzt das Feld $\mathbf{E'}_{\mathbf{scheinladung}}$ der geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung Quellen und Senken im "Nichts", wodurch das elektrische Gesamtfeld außerhalb von Ladungen nicht immer und überall divergenzlos ist.

c) Die Eichbedingung **div A'=0** ist auch dann nicht erfüllt, wenn das relativistische elektrische Feld $\mathbf{E'}_{\mathrm{rel}}$ isoliert betrachtet werden soll. Wegen (14) und (17), d.h. wegen:
(28)

$$\vec{E}'_{total} = -\frac{\delta \vec{A}'}{\delta t'} + \vec{E}_{abs-contr} = \vec{E}'_{rel} + \vec{E}_{abs-contr}$$

gilt für $\mathbf{E'}_{\mathrm{rel}}$ (unabhängig von speziellen Eichbedingungen):
(29)

$$\vec{E}'_{rel} = -\frac{\delta \vec{A}'}{\delta t'}$$

Da **div** $\mathbf{E'}_{\mathrm{rel}}$ **= div dA'/dt'** ungleich null sein kann (siehe oben), so ist wegen der Vertauschbarkeit der Reihenfolge partieller Ableitungen (Schwarzsches Theorem) auch die zeitliche Änderung von **div A'** nicht immer und überall null. Ist die zeitliche Änderung von

div A' nicht immer und überall null, so ist auch **div A'** nicht immer und überall null.

Mathematisch ausgedrückt (falls die Divergenz von **A'** null zu einem Zeitpunkt sein sollte, so soll dieser Zeitpunkt mit **t=0** bezeichnet werden):
(30)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}'_{rel} = \vec{\nabla} \cdot -\frac{\delta \vec{A}'}{\delta t'} = \frac{\delta}{\delta t'} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}') \neq 0 \Rightarrow (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}') \neq 0, \quad wenn\ t \neq 0$$

Mit anderen Worten: Zur Bestimmung des relativistischen elektrischen Feldes $\mathbf{E'_{rel}}$ einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung als Komponente des Vektors **dA'/dt'** ist die Eichbedingung **div A' = 0** nicht verwendbar.

c) Gleiches gilt im Übrigen auch für das relativistische elektrische Feld eines geradlinig und gleichförmig bewegten, stromführenden Leiters: Man stelle sich einen langen, geraden, einen konstanten Strom führenden Draht vor. Dieser Draht sei in Längsrichtung mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. An einem fixen Punkt in einiger Entfernung vom Draht verändert sich – benutzt man die Eichbedingung **div A' = 0** – das Vektorpotential während der Bewegung des Drahtes nicht, da sich ja die Stromstärke im Draht nicht verändert. Dennoch existiert während der Bewegung des Drahtes ein relativistisches elektrisches Feld, das seine Quellen oder Senken im Draht hat.

Nimmt man aber an, dass das relativistische elektrische Feld des bewegten stromführenden Drahtes nun einmal Bestandteil des Feldes **-dA/dt** ist (siehe Gl. 29), so kann der Widerspruch seine Ursache nur darin haben, dass die gewählte Eichbedingung nicht zutrifft.

7.4) Die Widersprüchlichkeit der Lorenz-Eichbedingung

Die Verwendung der sogenannten "Lorenz"-Eichbedingung – anstelle der für die Bestimmung des relativistischen elektrischen Feldes einer geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung untauglichen Coulomb-Eichbedingung **div A' = 0** – kommt für die Bestimmung des relativistischen elektrischen Feldes (als Bestandteil von **-dA'/dt**) oder des Feldes $\mathbf{E'_{scheinladung}}$ ebenfalls nicht in Betracht. Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

a) Wenn die Divergenz des Vektorpotentials die als "Lorenz-Eichbedingung" bezeichnete Randbedingung
(31)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = -\frac{1}{c^2} \frac{\delta \varphi'}{\delta t'}$$

erfüllt (das gestrichene System ist das Ruhesystem des Labors, während das ungestrichene System das Ruhesystem der Feldquelle ist), so verwandelt sich (24) in:
(32)

$$c^2\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}') = c^2[\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}') - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{A}'] = c^2(-\vec{\nabla}\frac{\delta\varphi'}{c^2\ \delta t'} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{A}') = \frac{\vec{J}'}{\varepsilon_0} + \frac{\delta\vec{E}'_{total}}{\delta t'}$$

Ersetzt man $\mathbf{E'}_{total}$ in Gemäßheit der Gleichung (17), so verwandelt sich (32) in
(33)

$$c^2(-\vec{\nabla}\frac{\delta\varphi'}{c^2\ \delta t'} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{A}') = \frac{\vec{J}'}{\varepsilon_0} + \frac{\delta\vec{E}'_{total}}{\delta t'} = \frac{\vec{J}'}{\varepsilon_0} - \delta\,\frac{\vec{\nabla}\varphi'}{\delta t'} - \frac{\delta^2\vec{A}'}{\delta t'^2} = \frac{\vec{J}'}{\varepsilon_0} - \vec{\nabla}\frac{\delta\varphi'}{\delta t'} - \frac{\delta^2\vec{A}'}{\delta t'^2}$$

Eine Umformulierung führt schließlich zu:
(34)

$$c^2\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{A}' = c^2\nabla^2\vec{A}' = -\frac{\vec{j}'}{\varepsilon_0} + \frac{\delta^2\vec{A}'}{\delta t'^2}$$

und zu der Gleichung (siehe die explizite Rechnung bei Feynman, Lectures on Physics, Vol 2, Kapitel 18-6, Seite 18-10 bis 18-11, Gleichung 18-25):
(35)

$$\nabla^2\varphi' = \nabla \cdot \vec{\nabla}\varphi' = \nabla \cdot \vec{E}'_{abs} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2\varphi'}{\delta t'^2}$$

Die letzte Gleichung, nämlich (35), steht aber – obwohl nur das absolute und nicht das relativistische Feld $\mathbf{E'}_{rel}$ oder das Feld $\mathbf{E'}_{scheinladung}$ einer Ladung betrachtet wird – im Widerspruch zum Gaußschen Gesetz (in der Form einer Maxwellschen Gleichung), wenn die um $\mathbf{1/c^2}$ erweiterte zweite Ableitung des elektrostatischen Potentials nach der Zeit von null verschieden ist. Denn nach dem Gaußschen Gesetz ist das geschlossene Flächenintegral der elektrischen Feldstärke gleich der mit einer Konstanten multiplizierten Ladungsdichte, ohne dass ein Summand hinzuzufügen wäre. Das Gaußsche Gesetz verlangt somit im Hinblick auf (35):
(35a)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\delta^2\varphi'}{(\delta t')^2} = 0$$

Diese Bedingung des Verschwindens der zweiten Ableitung des Potentials nach der Zeit ist aber nicht in jedem Fall erfüllt. Zur Veranschaulichung: Fliegt eine Punktladung $\mathbf{q}$ in geradliniger und gleichförmiger Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{v_0}$ von einem Beobachter fort, so besitzt das vom elektrostatischen Feld der Punktladung erzeugte, numerisch negativ definierte Potential am Ort des Beobachters in Abhängigkeit von der Entfernung $\mathbf{R}$ $(=\mathbf{v_0 t})$ und damit in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit $\mathbf{t}$ folgenden Wert:
(36)

$$\varphi(t) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\, R(t)} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 v_0\, t}$$

Die erste Ableitung des Potentials nach der Zeit lautet:
(37)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 v_0\, t^2}$$

Die um **1/c²** erweiterte zweite Ableitung lautet:
(38)

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 c^2 v_0 t^3} = -\frac{q v_0^2}{2\pi\varepsilon_0 c^2 R(t)^3}$$

Die zweite Ableitung des Potentials nach der Zeit ist somit – anders als in (35a) gefordert – keineswegs zu jedem Zeitpunkt null.

b) Die Widersprüchlichkeit der Lorenz-Eichbedingung lässt sich schließlich noch auf andere Weise zeigen. Das Ampere-Maxwellschen Gesetz nimmt für den Fall, dass im betrachteten Volumenelement keine reale Stromdichte **j** und damit auch keine elektrische Ladung anzutreffen ist (das ungestrichene System ist hier das Ruhesystem des Labors), folgende Form an:
(40)

$$\frac{1}{c^2}(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{E}}_{abs} + \vec{\boldsymbol{E}}_{ind})}{\delta t}$$

Sind die Vektoren auf beiden Seiten der Gleichung gleich, so sind auch die Divergenzen der beiden Vektoren an jedem Ort gleich:
(40a)

$$\nabla \cdot \frac{1}{c^2}(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \nabla \cdot \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{E}}_{abs} + \vec{\boldsymbol{E}}_{ind})}{\delta t}$$

Da die Divergenz einer Rotation immer null sein muss, so kann (40a) wie folgt formuliert werden:
(41)

$$\nabla \cdot \frac{1}{c^2}(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \nabla \cdot \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{E}}_{abs} + \vec{\boldsymbol{E}}_{ind})}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}[\nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{E}}_{abs} + \vec{\boldsymbol{E}}_{ind})]$$

$$= \frac{\delta}{\delta t}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_{ind}) = \frac{\delta}{\delta t}(\nabla \cdot -\frac{\delta \vec{\boldsymbol{A}}}{\delta t}) = -\frac{\delta^2}{\delta t^2}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) = 0$$

Bei Geltung der Lorenz-Eichbedingung müsste es hingegen heißen:
(41b)

$$-\frac{\delta^2}{\delta t^2}(\nabla \cdot \vec{A}) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\delta^3\varphi}{\delta t^3}$$

Eine Übereinstimmung mit (41) wäre nur dann erzielt, wenn die dritte Ableitung von **phi** nach der Zeit null wäre.

Jedoch erhält man bei nochmaliger Differenzierung von (38):
(41c)

$$\frac{d^3\varphi}{dt^3} = \frac{3q}{2\pi\varepsilon_0 c^2 v_0\ t^4} = \frac{3qv_0^3}{2\pi\varepsilon_0 c^2 R(t)^4}$$

Die dritte Ableitung von **phi** nach der Zeit ist also keineswegs immer und überall null.

c) Die Lorenz-Eichbedingung ist somit (anders als die Coulomb-Eichbedingung) bei Feldern von Ladungen, die gleichförmig und geradlinig bewegt werden, selbst dann nicht anwendbar, wenn ein relativistisches elektrisches Feld $\mathbf{E'}_{\mathbf{rel}}$ oder ein Feld $\mathbf{E'}_{\mathbf{scheinladung}}$ völlig außer Betracht bleibt.

Ob die Lorenz-Eichbedingung im Falle des Vorhandenseins einer Divergenz des relativistischen elektrischen Feldes $\mathbf{E'}_{\mathbf{rel}}$ oder eines Feldes $\mathbf{E'}_{\mathbf{scheinladung}}$ im betrachteten Raumgebiet anwendbar wäre, soll gar nicht erst geprüft werden, da das relativistische elektrische Feld und das Feld $\mathbf{E'}_{\mathbf{scheinladung}}$ einer bewegten Ladung immer in Begleitung mit dem absoluten elektrostatischen Feld auftreten und deshalb Widersprüche unvermeidbar sind.

Immerhin ist, wie die Gleichung (38) und (41c) zeigen, der bei Verwendung der Lorenz-Eichbedingung begangene Fehler nur unmerklich klein, wenn die Geschwindigkeit $\mathbf{v_0}$ im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit **c** sehr klein ist.

Jedoch basiert die herkömmliche Lorentz-Transformation für elektrische und magnetische Felder geradlinig und gleichförmig bewegter elektrischer Ladungen und Magnete unter anderem auf eben der Lorenz-Eichbedingung, da diese Eichbedingung einen Ausgangpunkt der Herleitung des "Viererpotentials" bildet, woraus wiederum die herkömmliche Lorentz-Transformation für elektrische und magnetische Felder entwickelt wird (siehe R.P. Feynman, Lectures on Physics, Vol. II, Kapitel 25-4 und 26-3; C. Ewerz, Klassische Elektrodynamik, Vorlesung an der Universität Heidelberg, 2017, Kapitel VII 1 und VII 2; siehe auch weiter unten).

8) Die Notwendigkeit einer Präzisierung des Gaußschen-Maxwellschen Gesetzes (sowohl

des elektrischen als auch des magnetischen) und des Ampere-Maxwellschen Gesetzes

a) Es sei daran erinnert, dass die unmittelbar aus dem Maxwell-Faradayschen Gesetz ableitbare Gleichung (15a) ein elektrisches Feld $\mathbf{E'}_{\mathbf{scheinladung}}$ einer geradlinig und gleichförmig bewegten Punktladung beschreibt, das quer zur Bewegungsrichtung orientiert ist. Vor und hinter der bewegten elektrischen Punktladung müssen die Feldlinien im "Nichts" enden oder beginnen und können ihre Anfangs- oder Endpunkte nicht in der Ladung haben.

Wenn elektrische Feldlinien zwar in einem Volumenelement enden oder beginnen, an diesen Endpunkten aber keine Ladungen anzutreffen sind, so ist die Divergenz der Summe aus realem Strom und Verschiebungsstrom $\mathbf{dE'}_{\mathbf{total}}\mathbf{/dt'}$ nicht null. Zum anderen ist die Divergenz der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E'}_{\mathbf{monopol}}$ und damit auch der elektrischen Gesamtfeldstärke $\mathbf{E'}_{\mathbf{total}}$ (= $\mathbf{E'}_{\mathbf{scheinladung}} + \mathbf{E'}_{\mathbf{abs}} = \mathbf{E'}_{\mathbf{rel}} + \mathbf{E}_{\mathbf{abs\text{-}contr}}$**)** abweichend vom Gaußschen Gesetz nicht proportional zur Ladungsdichte, denn Ladungen sind dort, wo die Divergenz des elektrischen Gesamtfeldes der geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung von null verschieden ist, entweder gar nicht oder aber nur in zu geringer Menge vorhanden (nur das Partialfeld $\mathbf{E'}_{\mathbf{abs}}$ erfüllt das Gaußsche Gesetz).

Folglich ist das Gaußsche-Maxwellsche Gesetz wie folgt zu präzisieren (das ungestrichene System ist jetzt wieder das Ruhesystem des Labors):
(20a)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_{abs} + \vec{E}_{ind}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_{total} - \vec{E}_{scheinladung}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\mathbf{E}_{\mathbf{ind}}$ ist – per obiger Definition – dasjenige elektrische Feld, dessen Divergenz immer und überall (wenn auch nicht notwendig im Innern des felderzeugenden Körpers) null ist und dessen Rotation nicht überall null ist. Es wird durch beschleunigte Ladungen, aber auch durch gleichförmig oder ungleichförmig bewegte absolute Magnetpole erzeugt.

b) Dann aber muss auch (wie bereits angedeutet) das Amperesche-Maxwellsche Gesetz dahingehend modifiziert werden, dass unter der Verschiebungsstromdichte **dE/dt** die zeitliche Veränderung nicht des elektrischen Gesamtfeldes, sondern die des elektrischen Gesamtfeldes abzüglich des Feldes $\mathbf{E}_{\mathbf{scheinladung}}$ der gleichförmig und geradlinig bewegten elektrischen Ladung verstanden wird. Denn das Gesetz behauptet ja, dass überall dort, wo die Divergenz der Vektorgröße **dE/dt** von null verschieden ist, eine Zunahme oder Abnahme von Ladung stattfindet. Dies trifft jedoch dort nicht zu, wo ein elektrisches Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{scheinladung}}$ einer geradlinig und gleichförmig bewegten Ladung anzutreffen ist.

Im Einzelnen:

Aus der Ampere-Maxwellschen Gleichung (worin **j** die Stromdichte in **Amp/m²** darstellt)
(20b)

$$c^2\,(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \frac{\vec{\boldsymbol{j}}}{\varepsilon_0} + \frac{\delta\vec{\boldsymbol{E}}}{\delta t}$$

und dem Umstand, dass die Divergenz einer Rotation immer null ist, folgt für Raumbereiche, in denen die reale Stromdichte **j** gleich null ist:
(20c)

$$\nabla \cdot [c^2\,(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}})] = \nabla \cdot \frac{\delta\vec{\boldsymbol{E}}}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0$$

Bei einer geradlinig und gleichförmig bewegten Punktladung ist jedoch die Divergenz von $\mathbf{E}_{\mathbf{scheinladung}}$ (im System des Labors betrachtet) in leeren Raumbereichen einerseits von null verschieden, anderseits zeitlich veränderlich. Deshalb kann das elektrische Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{scheinladung}}$ nicht Bestandteil des im Ampere-Maxwellschen Gesetzes erscheinenden **E** sein (siehe bereits oben).

Das Ampere-Maxwellsche Gesetz muss somit lauten:
(20d)

$$c^2\,(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \frac{\vec{\boldsymbol{j}}}{\varepsilon_0} + \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{E}}_{abs} + \vec{\boldsymbol{E}}_{ind})}{\delta t} = \frac{\vec{\boldsymbol{j}}}{\varepsilon_0} + \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{E}}_{total} - \vec{\boldsymbol{E}}_{scheinladung})}{\delta t}$$

Dann nämlich gilt (wie dies angesichts der Divergenzlosigkeit einer jeden Rotation nicht anders sein darf):
(20e)

$$\nabla \cdot c^2\,(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{j}}}{\varepsilon_0} + \nabla \cdot \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{E}}_{abs} + \vec{\boldsymbol{E}}_{ind})}{\delta t} = \nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{j}}}{\varepsilon_0} + \frac{\delta}{\delta t}\,\nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{E}}_{abs} + \vec{\boldsymbol{E}}_{ind}) = 0$$

c) Schließlich ist (siehe bereits oben) auch noch das Maxwell-Gaußsche Gesetz des Magnetismus zu präzisieren. Es muss lauten:
(20g)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}}_{total} - \vec{\boldsymbol{B}}_{monopol}) = 0$$

8.1) Zusammenfassung: Das relativistische elektrische Feld in den Maxwellschen Gleichungen

Das relativistische elektrische Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$ der geradlinig und gleichförmig bewegten

elektrischen Ladung ist Bestandteil des Feldes **-dA/dt**. Dies folgt bereits, daran sei erneut erinnert, aus der weiter oben im Zusammenhang mit der Ableitung der Grundgleichungen (6) und (11) entwickelten Gleichung, nämlich aus (das ungestrichene System ist das Ruhesystem des Labors):
(43)

$$\vec{E}_{total} = \vec{B} \times \vec{v} + \vec{\nabla} C'_{contr} = \vec{B} \times \vec{v} - \vec{\nabla} \varphi'_{contr}$$

Denn zusammen mit (17), d.h., zusammen mit

$$\vec{E}_{total} = -\vec{\nabla} \varphi'_{contr} - \frac{\delta \vec{A}}{\delta t}$$

ergibt sich daraus (beim Fehlen von $\mathbf{E}_{\mathbf{ind}}$):
(44)

$$-\frac{\delta \vec{A}}{\delta t} = \vec{B} \times \vec{v} = \vec{E}_{rel}$$

Fügt man das induktive Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{ind}}$ auf der rechten Seite von (44) hinzu (beim Vorhandensein eines bewegten absoluten Magneten), so ergibt sich:
(45)

$$\frac{-\delta \vec{A}}{\delta t} = \vec{E}_{ind} + \vec{E}_{rel}$$

Während das Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{ind}}$ zwangsläufig, nämlich per Definition, überall (wenn auch nicht notwendig im Innern des felderzeugenden Körpers) divergenzlos und nicht überall wirbelfrei ist, ist das Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$ nicht überall divergenzlos (insbesondere nicht außerhalb des felderzeugenden Körpers) und nicht überall wirbelfrei. Damit ist gemäß (45) auch **-dA/dt** nicht überall divergenzlos (insbesondere nicht außerhalb des felderzeugenden Körpers), oder, anders ausgedrückt (nämlich mit Hilfe des Schwarzschen Gesetzes): Die erste zeitliche Ableitung von **div A** ist nicht überall null, wenn ein relativistisches elektrisches Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$ einer geradlinig und gleichförmig bewegten elektrischen Ladung Bestandteil von **-dA/dt** ist.

(Man beachte: Die oben gefundene Erkenntnis, wonach die zeitlichen Ableitungen von **div A** null sind, war nicht auf relativistische elektrische Felder geradlinig und gleichförmig bewegter Ladungen bezogen.)

Ist die erste zeitliche Ableitung von **div A** bei Existenz eines relativistischen Feldes $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$ nicht überall null, so ist auch **div A** (entgegen der Coulombschen Eichbedingung) nicht immer und überall null.

9) Der Analogfall des bekannten und aufgelösten Trouton-Noble-Paradoxons: Zwei

Magnetpole, die sich im System eines Beobachters ein Rennen liefern und auf die eine "elektrische Lorentzkraft" wirkt

Das dargestellte Trouton-Noble-Paradoxon einschließlich seiner Erweiterung lässt sich auf zwei (gleichnamige) Magnetpole (zweier Magneten) übertragen, die sich beide geradlinig-gleichförmig mit gleicher Geschwindigkeit im System des Labors parallel zur **x'**-Achse bewegen, wobei ein Magnetpol gegenüber dem anderen einen konstanten Vorsprung besitzen und die Verbindungslinie der beiden Pole mit der **x'**-Achse des Systems des Labors einen Winkel von 45° bilden soll.

Man stelle sich vor, jeder dieser beiden Magnetpole werde jeweils von einem Ende eines langen Stabmagneten gebildet, so dass sich tatsächlich zwei lange Stabmagneten bewegen. Die anderen beiden Enden sollen weit voneinander entfernt sein, so dass die dort befindlichen Magnetpole praktisch keine Wirkung auf andere Pole ausüben.

Dann wirkt auf die beiden Magnetpole, die sich im Ruhesystem eines Beobachters geradlinig bewegen, eine "elektrische Lorentzkraft". Die Existenz einer "elektrischen Lorentzkraft" begründet sich wie folgt: Man verlasse für einen kurzen Moment die beiden Magnetpole und wende sich einer anderen Konstellation zu. Im Ruhesystem eines Magnetpols sei die Quelle eines elektrostatischen Feldes, d.h. eine elektrische Ladung, in gleichförmiger und geradliniger Bewegung. Wegen der Bewegung erzeugt sie auch ein Magnetfeld. Dieses Magnetfeld wirkt auf den ruhenden Magnetpol und übt auf diesen eine Kraft aus. Wechselt man zur Beschreibung dieses Phänomens in das Ruhesystem der elektrischen Ladung, so bewegt sich dort der Magnetpol durch ein elektrisches Feld, nämlich durch das elektrische Feld der ruhenden Ladung. Die (jedenfalls qualitativ) auch im Ruhesystem der elektrischen Ladung feststellbare, auf den Magnetpol wirkende Kraft kann hier nicht einem Magnetfeld zugeschrieben werden, da ja in diesem System nur das Magnetfeld des Magnetpols selbst existiert, dieser aber nicht auf sich selbst eine beschleunigende Kraft ausüben kann. Folglich muss es in diesem System eine Kraft geben, die proportional zur Stärke des Magnetpols und zur Größe des Vektorprodukts der elektrischen Feldstärke und der Geschwindigkeit des Magnetpols ist. Diese Kraft, die gelegentlich in Lehrbüchern beschrieben wird, wird "elektrische Lorentzkraft" genannt.

[Einer der viel zu seltenen Fälle der Erwähnung der "elektrischen Lorentzkraft" in Lehrbüchern findet sich in dem MIT-Lehrbuch von R.M. Fano, L.J. Chu, R.B. Adler, Electromagnetic Fields, Energy, and Forces, New York 1950, Kapitel 7, S. 270 und Kapitel 7.1, Gleichung 7.10, S. 272.]

Existiert ein elektrisches Feld, durch das sich im Ruhesystem eines Beobachters ein Magnetpol bewegt, so kann es nach dem Lokalitätsprinzip (wonach für die Kräfte, die auf einen Körper wirken, nur die Verhältnisse in direkter Nähe des Körpers verantwortlich sind und keine unmittelbare Fernwirkung existiert) für die auf den Magnetpol wirkende elektrische Lorentzkraft nicht darauf ankommen, ob das elektrische Feld durch eine elektrische Ladung oder durch eine im Ruhesystem des Beobachters stattfindende Bewegung eines (weiteren) absoluten Magneten erzeugt wird.

Zurück zum beschriebenen Fall der beiden gleichnamigen Magnetpole (zweier Magneten): Da die Magnetpole im Ruhesystem des Beobachters parallel zur **x**-Achse bewegt werden – und zwar in der von der **x**- und **y**-Achse aufgespannten Ebene – , erzeugt das magnetische Feld eines jeden der beiden Magnetpole jeweils ein relativistisches elektrisches Feld, das $\mathbf{E}_{\mathbf{ind}}$ genannt werden soll (siehe oben). An dem Ort, an dem sich der andere Magnetpol momentan aufhält, weist dieses elektrische Feld in **z**-Richtung. Indem sich der letztgenannte Magnetpol durch dieses elektrische Feld bewegt, erfährt er – im System des Labors – eine "elektrische Lorentzkraft" quer zur Bewegungsrichtung und quer zur Richtung des elektrisches Feldes, nämlich in **y**-Richtung.

Bei passendem Vorzeichen wirkt die Kraft auf den einen Magnetpol in positiver **y**-Richtung. Für den anderes Pol gilt Entsprechendes; allein mit dem Unterschied, dass die elektrische Lorentzkraft bei diesem in negativer **y**-Richtung wirkt. Auf die starre Verbindung der beiden Magnetpole wirkt somit ein Drehmoment, das jedoch im Ruhesystem der Magnetpole gar nicht existiert.

Auch hier gelingt die Lösung des Paradoxons nur dadurch, dass man die Existenz eines relativistischen Magnetfelds eines bewegten Magnetpols anerkennt – in völliger Analogie zu den Verhältnissen bei der gleichförmig und geradlinig bewegten elektrischen Ladung, wo man, neben dem elektrostatischen Feld, die Existenz eines relativistischen elektrischen Feldes anerkennen muss, wenn man das (echte) Trouton-Noble-Paradoxon lösen will.

Dieses Feld ist bereits in (11a) beschrieben worden. Durch das in (11a) beschriebene relativistische Magnetfeld eines bewegten absoluten Magnetpols, nämlich durch
(50)

$$\vec{B}_{rel} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}_{ind} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times (-\vec{v} \times \vec{B}_{abs}) = \frac{\vec{v}}{c^2} \times (-\vec{v} \times k\vec{B}'_{abs})$$

wird die elektrische Lorentzkraft vollständig kompensiert.

Wie bereits ausgeführt, besitzt dieses vom bewegten Magnetpol erzeugte relativistische Magnetfeld Quellen und Senken; Gleiches gilt für das magnetische Gesamtfeld des bewegten Magnetpols.

Das Phänomen des magnetischen Monopols – was nur ein anderer Ausdruck für die von null verschiedene Divergenz des Magnetfelds ist – ist somit nichts anderes als die perspektivische Kehrseite der (bislang in der Literatur durchaus anerkannten) elektrischen Lorentzkraft.

10) Die Notwendigkeit einer weiteren Modifizierung der Lorentztransformation

Vergleicht man die physikalisch korrekte Gleichung für das totale elektrische Feld der gleichförmig und geradlinig bewegten Ladung mit der herkömmlichen, aus der üblichen Form der Lorentztransformation (für elektrische und magnetische Felder) abgeleiteten Gleichung

(12), so zeigt sich, da ja (12) zur Verletzung des Relativitätsprinzips führt (wie das Trouton-Noble-Paradoxon zeigt), dass die Lorentzransformation einer Modifikation bedarf, um zusammen mit anderen Gleichungen der Elektrizitätslehre, die bei der Herleitung von (11) und bei der Lösung des Trouton-Noble-Paradoxons benutzt wurden, ein widerspruchfreies System zu ergeben (die erste Modifikation wurde bekanntlich von Einstein im Jahre 1905 vorgenommen; die heute allgemein verwendete "Lorentztransformation" ist also streng genommen eine "Lorentz-Einstein-Transformation").

Das heißt: Will man das elektrische Feld (und auch das magnetische Feld) vom ungestrichenen System (in welchem die Quelle des absoluten elektrischen Feldes oder des absoluten magnetischen Feldes ruht) in das gestrichene System transformieren und dabei das relativistische elektrische Feld (und auch das relativistische Magnetfeld) einbeziehen, wie es einerseits als Ergebnis der Lorentzkontraktion des elektrostatischen und des magnetostatischen Feldes (nur dies wird in der üblichen Formulierung der Lorentz-Transformation berücksichtigt), andererseits als Phänomen eigener Art in Erscheinung tritt (dies wird in der üblichen Formulierung der Lorentz-Transformation *nicht* berücksichtigt), so muss die herkömmliche Lorentztransformation umgewandelt werden in (das ungestrichene System ist das System, in welchem die Feldquelle ruht):
(53)

$$B_x' = B_x \qquad\qquad E_x' = E_x$$

$$B_y' = (k\frac{v^2}{c^2} + 1)B_y + k\frac{v}{c^2}E_z \qquad\qquad E_y' = (k\frac{v^2}{c^2} + 1)E_y - kvB_z$$

$$B_z' = (k\frac{v^2}{c^2} + 1)B_z - k\frac{v}{c^2}E_y \qquad\qquad E_z' = (k\frac{v^2}{c^2} + 1)E_z + kvB_y$$

Das auf den rechten Seiten der Gleichungen in jeder der beiden Spalten auftauchende **B** ist das von einem absoluten Magneten erzeugte Magnetfeld; das dort auftauchende **E** ist das von einer Ladung erzeugte elektrostatische und damit qualitativ absolute Feld.

Der Klammerausdruck **(kv^2/c^2+1)** in (53) kann durch den Ausdruck **[k+(1-1/k)]** ersetzt werden (siehe Gleichung 15i).

Erst nach dieser Modifikation ergibt die Lorentztransformation zusammen mit anderen anerkannten Gleichungen der Elektrizitätslehre und dem Relativitätsprinzip ein widerspruchsfreies System. Zudem folgt die richtige Lorentztransformation, nämlich (53), unmittelbar aus den Gleichungen (5), (6), (9), (9a), (11), (11a), (11b), (11c), (15), und damit aus den Maxwellschen Gleichungen.

11) Der bislang übersehene Fehler bei der Entwicklung der herkömmlichen Lorentztransformation für elektrische und magnetische Felder

a) Verwendet man das Vektorpotential **A**, so ergeben sich für das elektrische Feld und das

magnetische Feld folgende Beziehungen (siehe auch L. Susskind/A. Friedman, Special Relativity and Classical Field Theory, 2017, Kapitel 6.3.6, Gleichung 6.36, S. 247):
(54)

$$E_x = \frac{\delta A_0}{\delta x} - \frac{\delta A_z}{\delta t} \qquad B_x = \frac{\delta A_z}{\delta y} - \frac{\delta A_y}{\delta z}$$

$$E_y = \frac{\delta A_0}{\delta y} - \frac{\delta A_y}{\delta t} \qquad B_y = \frac{\delta A_x}{\delta z} - \frac{\delta A_z}{\delta x}$$

$$E_z = \frac{\delta A_0}{\delta z} - \frac{\delta A_z}{\delta t} \qquad B_z = \frac{\delta A_y}{\delta x} - \frac{\delta A_x}{\delta y}$$

Das Vektorpotential **A** ist um eine vierte Komponente, nämlich $\mathbf{A_0}$, erweitert worden, die wiederum mit dem elektrostatischen Potential gleichgesetzt wird. Die weiteren Komponenten von **A** sind die vertrauten Komponenten in den verschiedenen räumlichen Richtungen. Anders ausgedrückt sind die vier Komponenten dieses Vektors die folgenden: **phi** $\mathbf{(=A_0)}$, $\mathbf{A_x}$ $\mathbf{(=A_1)}$, $\mathbf{A_y(=A_2)}$,$\mathbf{A_z(=A_3)}$.

Die in (54) enthaltenen Gleichungen für die Komponenten des elektrischen Feldes (linke Spalte) ergeben sich aus (17), d.h. aus

$$\vec{E}_{total} = -\vec{\nabla}\varphi^{/}_{contr} - \frac{\delta\vec{A}}{\delta t}$$

Man beachte: Die Gleichung (17) gilt an sich unabhängig davon, ob sich die Quelle des Feldes im System des Beobachters bewegt oder statt dessen dort ruht, aber immer nur unter der Bedingung, dass die Rotation des Gradienten des Potentials null ist (siehe oben). Ist die Feldquelle in Bewegung, so muss deshalb – sowohl in (17) als auch in der Komponentendarstellung des vierdimensionalen Vektorpotentials **A** – der Ausdruck **phi** durch **phi'**$_{\mathbf{contr}}$ ersetzt werden (siehe oben).

Die Gleichungen für die Komponenten des magnetischen Feldes (rechte Spalte von Gleichung 54) ergeben sich aus der Erkenntnis, dass das **B**-Feld nichts anderes als die Rotation des wieder auf drei Komponenten (nämlich die in **x**-,**y**- und **z**-Richtung weisenden) reduzierten Vektorpotentials **A** ist.

Die in (54) enthaltenen sechs Gleichungen lassen sich zusammengefasst als 4x4-Tensor formulieren. Dann heißt es:
(55)

$$F_{\mu\nu} = \frac{\delta A_\nu}{\delta x^\mu} - \frac{\delta A_\mu}{\delta x^\nu} = \begin{matrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ +E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ +E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{matrix}$$

Der Index **μ** (mit den Werten 0,1,2,3) bezeichnet die jeweilige horizontale Zeile, der Index **nu** (mit den Werten 0,1,2,3) bezeichnet die jeweilige vertikale Säule. Hierbei gilt per Festsetzung: **$dx^0 = dt$**, **$dx^1 = dx$**, **$dx^2 = dy$**, **$dx^3 = dz$**. Zu den Bedeutungen von **A_0, A_1, A_2** und **A^3** siehe oben.

Nunmehr wechsele man das Bezugssystem. Während die Feldquelle im ungestrichenen System ruht, soll sie im gestrichenen System in geradliniger und gleichförmiger Bewegung sein. Die herkömmliche Meinung postuliert für den im gestrichenen System anzutreffenden Tensor **F'**(siehe nur: L. Susskind/A. Friedman, Special Relativity and Classical Field Theory, 2017, Kapitel 8.1.1, Gleichung 8.2, S. 276):
(56)

$$(F')^{\mu\nu} = L^{\mu}_{\sigma}\, L^{\nu}_{\tau}\, F^{\sigma\tau}$$

L ist eine 4x4-Matrix, die nichts anderes als eine Verkörperung der für räumliche Distanzen und zeitliche Intervalle geltenden, allgemeinen Lorentztransformation darstellt. Das Ergebnis der Multiplikation ist die herkömmliche, zum ersten Mal von Einstein im Jahre 1905 formulierte Lorentztransformation für elektrische und magnetische Felder einer gleichförmig und geradlinig bewegten Quelle. Sie unterscheidet sich von (53), indem die runden Klammern jeweils durch den Faktor **k** ersetzt werden.

b) Die in (55) auftauchende Ableitung von **dA_0** nach **dx** (oder nach **dy** oder nach **dz**), d.h., das elektrostatische Feld, wird somit so behandelt, als wenn es sich hierbei um eine mit der Uhr gemessene Zeitspanne handeln würde.

Die Anwendung der gar nicht für elektrische und magnetische Felder, sondern für räumliche Strecken und zeitliche Intervalle aufgestellten und gültigen allgemeinen Lorentztransformation auf den Tensor **F** ist jedoch eine gewagte Spekulation. Sie basiert zunächst darauf, dass der 4-Komponenten-Vektor **A_0, A_1,A_2,A_3**, der das vierdimensionale Vektorpotential darstellt und auch in der Form **phi (=A_0), A_x (=A_1), A_y(=A_2),A_z(=A_3)**, ausgedrückt werden kann, in entsprechender Anwendung der allgemeinen, für räumliche und zeitliche Abstände und nicht für Feldstärken aufgestellten Lorentztransformation in ein anderes, relativ zum ersten geradlinig und gleichförmig bewegtes Koordinatensystem transformiert werden kann. (Eben wegen der angeblichen Anwendbarkeit den Regeln der allgemeinen Lorentztransformation wird der Vektor "Vierervektor" genannt.) Auf eben dieser Grundlage wird die allgemeine, für räumliche und zeitliche Werte und Abstände und nicht für Feldstärken gültige Lorentztransformation auf einen 4x4-Tensor angewandt, dessen Komponenten Funktionen, nämlich Ableitungen, von Komponenten des Vektors **A_0, A_1,A_2,A_3** sind.

(A. Einstein ging in seiner Arbeit aus dem Jahre 1905 ähnlich vor: Sein System von sechs Gleichungen, das der obigen Gleichung 54 entspricht, benutzte zwar nicht das Vektorpotential, sondern verkörperte –auf Grundlage der Maxwellschen Gleichungen– Beziehungen zwischen elektrischen und magnetischen Feldstärke; diese sechs Gleichungen wurden im nächsten Schritt – ähnlich wie die obige Gleichung 54 – mit Hilfe der allgemeinen, für zeitliche und räumliche Werte und Abstände geltenden Lorentztransformation transformiert, indem, neben anderen Gleichsetzungen, elektrische und magnetische Feldstärken wie räumliche und zeitliche Koordinaten behandelt werden; siehe A. Einstein, "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", Annalen der Physik, Band 17 – 1905 – , § 6, S. 907: "*Wenden wir auf diese Gleichungen die in § 3 entwickelte Transformation an, indem wir die elektromagnetischen Vorgänge auf das dort eingeführte, mit der Geschwindigkeit v bewegte Koordinatensystem beziehen, so erhalten wir die Gleichungen*: ...").

c) aa) Konsequenterweise müsste dann, wenn der Vektor $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$,$\mathbf{A_2}$,$\mathbf{A_3}$ (vierdimensionales "Vektorpotential") tatsächlich unter entsprechender Benutzung der für räumliche und zeitliche Werte und Abstände gültigen allgemeinen Lorentztransformation in ein anderes Bezugssystem transformiert werden könnte, in Entsprechung zu der (aus dieser allgemeinen Lorentztransformation bekanntlich herleitbaren) Gleichung der vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit (worin die linke Seite das "Linienelement" der Raumzeit darstellt) folgendes Postulat aufgestellt werden:

$$(d\varphi')^2 = (\delta\varphi)^2 - c^2(\delta A_x)^2 - c^2(\delta A_y)^2 - c^2(\delta A_z)^2$$

Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch **(ds)²**, d.h., durch das Quadrat des im ungestrichenen System des Labors gemessenen räumlichen Momentanabstands zwischen zwei benachbarten Raumpunkten, so müsste gelten:
(57)

$$\frac{(d\varphi')^2}{(ds)^2} = \frac{(\delta\varphi)^2}{(ds)^2} - c^2\frac{(\delta A_x)^2}{(ds)^2} - c^2\frac{(\delta A_y)^2}{(ds)^2} - c^2\frac{(\delta A_z)^2}{(ds)^2}$$

Die Größe **d phi'** ist der im gestrichenen System festgestellte Unterschied des elektrostatischen Potentials zwischen den zwei genannten räumlichen Punkten, die im gestrichenen System, in welchem die Quelle des Feldes ruht, unbeweglich sind. Die Größe **d phi'** entspricht auf diese Weise der Eigenzeit in der vierdimensionalen Minkowski-Metrik.

bb) Gleichung (57) ist jedoch aus dem folgenden Grund ungültig: Man stelle sich vor, im gestrichenen System ruhe ein kreisförmiger, einen Strom konstanter Stärke führender Leiter in der von der horizontalen **x'**-Achse und der ebenfalls horizontalen **y'**-Achse aufgespannten Ebene (das ungestrichene System ist das System des Labors). Das Zentrum des Leiterkreises liege fest auf der **x'**-Achse und bewegt sich deshalb im ungestrichenen System des Labors mit konstanter Geschwindigkeit entlang der ungestrichenen **x**-Achse.

Betrachtet man in einer Momentaufnahme des ungestrichenen Systems des Labors zwei durch die Strecke **ds=dx** (bzw. durch die Strecke **ds'=dx'**) voneinander getrennte benachbarte räumliche Punkte A' und B', die beide fest auf der **x'**-Achse liegen, so gilt für diese beiden

Punkte (im ungestrichenen System des Labors betrachtet):
(58)

$$\frac{\delta A_y}{\delta s} \neq 0 \qquad \frac{\delta A_x}{\delta s} = 0 \qquad \frac{\delta A_z}{\delta s} = 0$$

Beweis: Bewegt sich im gestrichenen System, in welchem der Leiterring unbeweglich ist, eine Probeladung vom Punkt A' zum Punkt B', so erfährt diese Ladung – im gestrichenen System betrachtet – während dieser Zeitspanne eine Lorentzkraft in der positiven oder negativen **y'**-Richtung (hingegen nicht in **x'**-Richtung, da eine Lorentzkraft immer nur quer zur Bewegung einer Ladung entstehen kann, und auch nicht in der **z'**-Richtung, da alle **B'**-Feldlinien in derjenigen Ebene, in welcher die Punkte A' und B' liegen, ausschließlich eine **z'**-Richtung besitzen, eine Lorentzkraft aber nur senkrecht zu den magnetischen Feldlinien entstehen kann). Bewegt sich diese Probeladung im gestrichenen System so schnell, dass sie im ungestrichenen System unbeweglich ist, so ist diese in **y'**-Richtung weisende Kraft – im ungestrichenen System des Labors betrachtet – die Folge der Wirkung eines vom bewegten Leiterkreis erzeugten elektrischen Feldes (eine Lorentzkraft kann im ungestrichenen System des Labors nicht auf die Probeladung wirken, da diese ja dort unbeweglich ist). Dieses Feld kann nichts anderes sein als $-\mathbf{dA_y/dt}$. Dann aber existiert – in ein- und demselben Moment des ungestrichenen Systems des Labors betrachtet – ein Unterschied im Wert von $\mathbf{A_y}$ zwischen den beiden Punkten A' und B'. Denn der am bewegten Punkt A' (der fest auf der bewegten **x'**-Achse liegt) momentan im ungestrichenen System festzustellende Wert von $\mathbf{A_y}$ wird in diesem ungestrichenen System an derselben Stelle (d.h, an derselben Stelle **x**) einen Moment später (zweiter Zeitpunkt) durch einen veränderten Wert von $\mathbf{A_y}$ ersetzt ($\mathbf{dA_y/dt}$ ist ja von null verschieden), der identisch ist mit demjenigen Wert von $\mathbf{A_y}$, welcher im ersten Zeitpunkt an dem fest auf der bewegten **x'**-Achse liegenden, im ungestrichenen System des Labors jedoch bewegten Punkt B' festzustellen war.

Mit anderen Worten: Ist $\mathbf{dA_y/dt}$ im ungestrichenen System des Labors an einem im ungestrichenen System unbeweglichen Punkt von null verschieden, so ist auch der auf die beiden Punkte A' und B' (die in beiden Systemen, d.h., sowohl in in **x**- als auch in **x'**-Richtung einen differentiellen räumlichen Abstand voneinander aufweisen) im selben Moment des ungestrichenen Systems bezogene Quotient $\mathbf{dA_y/ds}$ und auch dessen Quadrat von null verschieden.

Noch anders ausgedrückt [**v(<c)** ist die Geschwindigkeit des Leiterkreises im ungestrichenen System]:
(58a)

$$0 \neq \frac{\delta A_y}{\delta t} = \frac{\delta s}{\delta s}\frac{\delta A_y}{\delta t} = v\,\frac{\delta A_y}{\delta s} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \neq \frac{\delta A_y}{\delta s}$$

Die anderen beiden in (58) enthaltenen Ableitungen von **A** sind evident null.

Damit ist (58) bewiesen.

Da die linke Seite von (57), nämlich das Quadrat von **d phi'/ds**, null ist (im gestrichenen Ruhesystem des Leiterkreises existiert keine elektrische Ladung, die ein Potential erzeugen könnte), wären beide Seiten der Gleichung (57) nur dann gleich, wenn der Absolutbetrag des auf der rechten Seite auftauchenden **d phi /ds** so groß wie der Absolutbetrag des ebenfalls auf der rechten Seite auftauchenden, von null verschiedenen **cdA$_y$/ds** wäre. Dies ist aber nicht der Fall. Ein elektrisches Potential **phi**, dessen Gradient – um von einem Potential zu sprechen – überall wirbelfrei sein müsste, existiert im ungestrichenen System schon deshalb nicht, weil das einzige elektrische Feld, das überhaupt existiert, das vom bewegten Leiterkreis erzeugte elektrische Feld ist, dieses aber nicht wirbelfrei ist. Die Wirbelhaftigkeit des von einem geradlinig bewegten Magneten erzeugten elektrischen Feldes ist vielmehr die Grundlage der elektrodynamischen Stromerzeugung. Genausowenig existiert ein Potential **phi'$_{contr}$**, das an die Stelle von **phi** treten könnte.

Das im ungestrichenen System tatsächlich existierende elektrische Feld wird im Übrigen durch **-dA/dt** (siehe die Gleichungen 44 und 45) und nicht durch den räumlichen Gradienten eines **phi** , d.h., nicht durch den Unterschied des Wertes von **phi** oder **phi'$_{contr}$** an den beiden miteinander verglichenen Punkten A' und B', beschrieben.

Man gelangt man zu dem widersprüchlichen Resultat, dass die rechte Seite von (57) von null verschieden ist, während die linke Seite null ist.

bb) Zum selben Resultat gelangt man schließlich bei Verwendung eines beliebigen Magneten, der im gestrichenen System ruht. Sofern die vom Magneten erzeugten Feldlinien an den beiden Punkten A' und B' (die jetzt entweder weiterhin fest auf der **x'**-Achse liegen oder aber statt dessen auf einer Linie liegen, die parallel zur **x'**-Achse verläuft) nicht bloß in **x'**-Richtung verlaufen, sondern auch Komponenten in **y'**- und/oder **z'**-Richtung besitzen, existiert im ungestrichenen System des Labors eine Kraft, die Komponenten in **y**- und/oder in **z**-Richtung aufweist, des relativistischen elektrischen Feldes des bewegten absoluten Magneten auf eine gedachte, im ungestrichenen System ruhende elektrische Probeladung. Somit muss gelten:
(59)

$$-[c^2\frac{(\delta A_y)^2}{(\delta t)^2} + c^2\frac{(\delta A_z)^2}{(\delta t)^2}] = -[c^2v^2\frac{(\delta A_y)^2}{(\delta s)^2} + c^2v^2\frac{(\delta A_z)^2}{(\delta s)^2}] < 0 \Leftrightarrow -[c^2\frac{(\delta A_y)^2}{(\delta s)^2} + c^2\frac{(\delta A_z)^2}{(\delta s)^2}] < 0$$

Auch in diesem allgemeinen Fall gelingt es nicht, beide Seiten von (57) gleich groß (nämlich null) sein zu lassen, da der auf der rechten Seite von (57) auftauchende Summand **(d phi)^2 /(ds)^2** nun einmal nicht so groß ist wie die Summe der Quadrate in der eckigen Klammer auf der rechten Seite von (59), sondern gar nicht existiert, und zudem im Hinblick auf **dA$_x$/ds** gilt:

$$0 = \frac{\delta A_x}{\delta t} = v\,\frac{\delta A_x}{\delta s} \Leftrightarrow 0 = \frac{\delta A_x}{\delta s} \Leftrightarrow -c^2\,\frac{(\delta A_x)^2}{(\delta s)^2} = 0$$

d) Da das vierdimensionale Vektorpotential **A** die "Minkowski-Probe" nicht bestanden hat und somit kein "Viererpotential" ist, d.h., nicht den Regeln der für zeitliche und räumliche Abstände gültigen Lorentz-Transformation folgt, ist es unzulässig, den elektromagnetischen 4x4-Feldtensor mit der Lorentz-Transformationsmatrix **L** zu multiplizieren.

e) Die herkömmliche Lehrbuchmeinung sieht hingegen einen angeblichen Beweis für die "Viererpotentialität" des vierdimensionalen Vektorpotentials **A** darin, dass die Divergenz des Gradienten des vierdimensionalen Vektorpotentials **A** ja gleich der Stromdichte **j** sei und dieses Ergebnis in jedem Bezugssystem gelte; eben deshalb würde **A** gemäß den Regeln der allgemeinen Lorentz-Transformation für räumliche und zeitliche Intervalle transformiert werden.

Diese Argumentation verfängt schon deshalb nicht, weil die Divergenz des Gradienten von **A** überhaupt nur dann gleich **j** ist, wenn die Lorenz-Eichbedingung Gültigkeit besitzt. Oben wurde jedoch nachgewiesen, dass die Lorenz-Eichbedingung zu Widersprüchen führt.

Zudem folgt aus dem Umstand, dass die Divergenz des Gradienten von **A** in jedem Bezugssystem denselben Wert besitzt, keinesfalls die entsprechende Anwendbarkeit der für räumliche und zeitliche Intervalle – und nicht für Differenzen von Komponenten des vierdimensionalen Vektorpotentials **A** – aufgestellten allgemeinen Lorentz-Transformation, da nun einmal räumlich-zeitliche Intervalle und Differenzen von Werten des Vektorpotentials nicht dasselbe sind.

Damit ist die herkömmliche, erstmalig von A. Einstein im Jahre 1905 aufgestellte Lorentz-Transformation für elektrische und magnetische Felder korrekturbedürftig.

f) Zum Vergleich betrachte man die Verhältnisse bei einem wirklichen "Vierervektor", z.B. beim vierkomponentigen Energie-Impuls-Vektor, dessen "Zeitkomponente" gleich $\mathbf{E/c^2}$ (wobei **E** die Gesamtenergie eines geradlinig und gleichförmig bewegten Körpers ist) und dessen räumliche Komponenten $\mathbf{p_x}$, $\mathbf{p_y}$ und $\mathbf{p_z}$, nämlich die Impulskomponenten des bewegten Körpers, sind:

Ausgehend von der um $\mathbf{c^2}$ erweiterten Minkowski-Gleichung (in welcher **t'=tau** die Eigenzeit eines mit der betrachteten Masse bewegten Beobachters darstellt), nämlich ausgehend von
(60)

$$c^2(dt')^2 = c^2(d\tau)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

gelangt man durch Multiplikation mit $\mathbf{m_0^2}$ (der quadrierten Masse des Körpers in dessen gestrichenem Ruhesystem, d.h., bei einer dortigen Geschwindigkeit des Körpers von null) und Division durch **(d tau)²** zu
(61)

$$m_0^2c^2 = m_0^2c^2\frac{(dt)^2}{(d\tau)^2} - m_0^2\frac{(dx)^2}{(d\tau)^2} - m_0^2\frac{(dy)^2}{(d\tau)^2} - m_0^2\frac{(dz)^2}{(d\tau)^2}$$

Da sich aus der allgemeinen, für räumliche und zeitliche Abstände gültigen Lorentztransformation die Beziehung **d tau = dt/k** ergibt, kann **d tau** in (61) substituiert werden. Dann ergibt sich:
(62)

$$m_0^2c^2 = k^2m_0^2c^2 - k^2m_0^2\frac{(dx)^2}{(dt)^2} - k^2m_0^2\frac{(dy)^2}{(dt)^2} - k^2m_0^2\frac{(dz)^2}{(dt)^2}$$

Setzt man nunmehr (wobei **m** die effektive Masse des bewegten Körpers darstellt)
(63)

$$m = km_0$$

und
(64)

$$E = km_0c^2 = mc^2$$

so verwandelt sich (62) in
(65)

$$m_0^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2\frac{(dx)^2}{(dt)^2} - m^2\frac{(dy)^2}{(dt)^2} - m^2\frac{(dz)^2}{(dt)^2} = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$$

Die Gleichung (65) gilt in jedem ungestrichenen Bezugssystem, egal mit welcher (unter **c** liegenden Geschwindigkeit) es relativ zum betrachteten Körper bewegt ist. Gleichung (65) wäre – bei Geltung von (60) – nur dann physikalisch ungültig, wenn (63) oder (64) physikalisch ungültig wären. Davon kann aber nicht die Rede sein.

Im Fall von (57) liegen die Dinge, wie gezeigt wurde, aber eben nicht so wie bei (65).

12) Die reguläre Lorentzkraft, die elektrische Lorentzkraft und eine dritte Lorentzkraft als perspektivische Kehrseiten der von der physikalisch korrekten Lorentztransformation beschriebenen Felder

a) Es sei daran erinnert, dass weder eine reguläre Lorentzkraft, die auf eine im gestrichenen Ruhesystem des Labors bewegte Probeladung wirkt, noch eine elektrische Lorentzkraft, die auf einen im gestrichenen System bewegten Probe-Magnetpol wirkt (siehe oben), *direkt* von der korrigierten Lorentztransformation beschrieben wird. Vielmehr ist die reguläre Lorentzkraft die perspektivische Kehrseite der elektrischen Kraft, die im Ruhesystem der Probeladung von dem relativistischen elektrischen Feld der dort bewegten Magnetfeldquelle auf die Probeladung ausgeübt wird. In analoger Weise ist die elektrische Lorentzkraft die perspektivische Kehrseite der magnetischen Kraft, die im Ruhesystem des bewegten Probe-Magnetpols von dem relativistischen Magnetfeld der dort bewegten Quelle des elektrischen Feldes auf den Probe-Magnetpol ausgeübt wird.

b) Tatsächlich gibt es in diesem Zusammenhang noch eine weitere, bislang namenlose Lorentzkraft: Ruht eine felderzeugende elektrische Ladung im System des Labors und bewegt sich eine elektrische Probeladung geradlinig und gleichförmig durch den Raum, so erfährt diese bewegte Probeladung neben der Kraft des absoluten elektrischen Feldes eine Zusatzkraft. Die Natur dieser Zusatzkraft erschließt sich ohne weiteres, wenn man sich in das Ruhesystem der Probeladung begibt. Dort wirkt auf die Probeladung eben nicht nur das absolute elektrostatische Feld, sondern auch noch ein von den Gleichungen (6) und (11) beschriebenes relativistisches elektrisches Feld $\mathbf{E}_{\mathbf{rel}}$ der bewegten Quelle des elektrostatischen Feldes. Im System des Labors kann diese Kraft aber nicht die Kraft eines relativistischen elektrischen Feldes einer bewegten, felderzeugenden elektrischen Ladung sein, denn die felderzeugende elektrische Ladung befindet sich ja dort in Ruhe. Es muss sich bei dieser Kraft vielmehr um eine dritte Art von Lorentzkraft handeln.

Anders ausgedrückt: Die *reguläre* Lorentzkraft ist die Kraft, die auf einen elektrisch geladenen Körper wirkt, der sich durch ein Magnetfeld bewegt; die *elektrische* Lorentzkraft ist die Kraft, die auf einen "magnetisch geladenen" Körper (Magnetpol) wirkt, der sich durch ein elektrisches Feld bewegt; die dritte, bislang namenlose Lorentzkraft ist die (Zusatz-)Kraft, die auf einen elektrisch geladenen Körper wirkt, der sich durch ein elektrisches Feld bewegt.

Sie soll dritte Lorentzkraft genannt werden.

13) Die (allerdings jeweils inkorrekte) Vorwegnahme der Modifikation der Lorentztransformation durch W. E. Weber, C.F. Gauss und G.F.B. Riemann

Die hier postulierte und aus den Maxwellschen Gleichungen abgeleitete Modifikation der Lorentztransformation ist von *Wilhelm Eduard Weber* (nach welchem die Einheit des magnetischen Flusses im SI-System benannt wurde) qualitativ vorweggenommen worden. Im Jahre 1846 (siehe *Wilhelm E. Weber*, "Über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung", in: Werke, Band 3, Erscheinungsjahr 1893, S. 25ff [157]) stellte er die (zuletzt noch im Jahre 1878 wiederholte) Behauptung auf, neben der vom elektrostatischen Feld einer geradlinig und gleichförmig bewegten Punktladung herrührenden (vom Coulomb-Gesetz beschriebenen) Kraftwirkung auf eine andere, nämlich ruhende Probeladung gebe es noch eine weitere Kraftwirkung dieser bewegten Punktladung auf die ruhende Probeladung, nämlich eine elektrodynamische. Bei einer gleichförmigen und geradlinigen Bewegung der felderzeugenden Punktladung wurde die auf eine ruhende Probeladung wirkende Zusatzkraft als proportional zum elektrostatischen Feld der bewegten Punktladung (am Ort der Probeladung) und zum Quadrat der Geschwindigkeit postuliert, mit der sich die bewegte Punktladung von der ruhenden entfernt.

Weber irrte sich allerdings zum einen bei der in seiner Gesetzesformulierung enthaltenen Annahme, die bewegte Ladung würde auch dann eine zusätzliche Kraft auf die ruhende Ladung ausüben, wenn letztere in der Fluchtlinie der bewegten Ladung läge (*W. Weber*, aaO, S. 134/135). Damit zusammenhängend irrte er sich bei der weiteren Annahme, wonach die Zusatzkraft, die auf eine im Koordinatenursprung ruhende Probeladung ausgeübt wird, null sei, wenn der Geschwindigkeitsvektor und der Ortsvektor der zweiten, nämlich bewegten felderzeugenden Ladung einen rechten Winkel miteinander bilden (die für *Weber* maßgebliche differentielle Veränderung des Abstandes der beiden Ladungen mit der Zeit ist in dieser Situation gleich null).

J.C. Maxwell weist darauf hin (Treatise on Electricity and Magnetism, Band 2, Dover Publ. 1954, Abschnitt 851, S. 483), dass *C.F. Gauss* früher als *Weber*, nämlich bereits im Jahre 1835 – in einem allerdings wohl erst posthum veröffentlichten Beitrag – in ähnlicher Weise ein Grundgesetz der elektrischen Kraftwirkung postuliert hatte, wonach zwei elektrische, relativ zueinander bewegte Ladungen einander abstoßen oder anziehen, und zwar nicht in derselben Weise wie in einem Zustand der relativen Unbeweglichkeit.

Eine Modifizierung des Weberschen Grundgesetzes ("Riemanns Grundgesetz") wurde schließlich von *B. Riemann* vorgeschlagen (*B. Riemann*, Schwere, Elektricität und Magnetismus, 2. Auflage 1890, § 99, S. 327, Gl. 4, 5 und 6). Für den Fall, dass Geschwindigkeitsvektor und Ortsvektor der zweiten, d.h. der bewegten Ladung einen rechten Winkel miteinander bilden, ergibt sich aus dem Riemannschen Gesetz in an sich korrekter Weise eine Zusatzkraft, die proportional zur Stärke der von der bewegten Ladung erzeugten, im Koordinatenursprung (wo die erste Ladung ruht) wirksamen Coulombkraft und darüber hinaus proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit der bewegten Ladung in diesem Koordinatensystem ist. Allerdings stimmt die *Richtung* der postulierten Zusatzkraft nicht, denn diese wird im konkreten Fall als parallel zum Geschwindigkeitsvektor und nicht zum Ortsvektor angenommen (siehe dazu auch: *K. Simonyi*, Kulturgeschichte der Physik, 1. Auflage 1990, Kapitel 4.4.7, S. 339-340).

14) Auswirkungen auf die Größe der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante

Die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante kann als das Verhältnis des Betrags der elektrostatischen Abstoßungskraft zur gravitativen Anziehungskraft zwischen zwei Punktpartikeln verstanden werden, die einerseits jeweils Planckmasse, andererseits jeweils eine Elementarladung besitzen und sich in einem beliebigen Abstand voneinander befinden.

Wendet man die herkömmliche, nämlich nur die relativistische Kontraktion von Meterstäben berücksichtigende Lorentztransformation für elektrische Felder, nämlich
(66)

$$E_x^{/} = E_x \qquad , \qquad E_y^{/} = kE_y \qquad , \qquad E_z^{/} = kE_z$$

an und berücksichtigt man den Umstand, dass diese Kontraktion auch bei *gravitativen* Feldlinien zu einer Verwandlung einer “Feldkugel” in eine “Feldscheibe” führt, so bliebe das Verhältnis der beiden genannten Kräfte unverändert, wenn sich eine Ladung mit relativistischer Geschwindigkeit geradlinig und gleichförmig durch den Raum bewegt. Denn für die gravitative Feldstärke **G** gilt wegen der Kontraktion von Meterstäben (das gestrichene System ist das Ruhesystem des Labors):
(67)

$$G_x^{/} = G_x \qquad , \qquad G_y^{/} = kG_y \qquad , \qquad G_z^{/} = kG_z$$

Tatsächlich aber ist die herkömmliche Lorentztransformation für elektrische und magnetische Felder korrekturbedürftig. Wie oben gezeigt wurde, nimmt die elektrische Feldstärke und damit die Kraft, die auf eine (der Einfachheit halber ruhende) Einheitsladung ausgeübt wird, mit wachsender Geschwindigkeit der Feldquelle etwas stärker zu, als dies von der herkömmlichen Lorentztransformation postuliert wird. Damit nimmt aber auch der Wert der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten **alpha** zu. Es gilt wegen (53) und (67) ($\mathbf{m_{0planck}}$ ist die Ruhemasse eines jeden der beiden Teilchens von der Größe der Planckmasse, $\mathbf{q_{\_elementar}}$ ist seine Ladung von der Größe einer Elementarladung; **E** ist das vom bewegten Teilchen erzeugte elektrische Feld, **G** ist das vom bewegten Teilchen erzeugte Gravitationsfeld):
(68)

$$\alpha_0 \leq \alpha = \frac{q_{elementar}|\vec{\boldsymbol{E}}|}{m_{0planck}|\vec{\boldsymbol{G}}|} \leq \frac{k\,\frac{v^2}{c^2} + 1}{k}\,\alpha_0 = \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{k}\right)\alpha_0$$

Die Größe **alpha_₀** ist die Feinstrukturkonstante im Zustand der Ruhe. Die Zunahme des Wertes ist nicht nur geschwindigkeits-, sondern auch positionsabhängig, da die Kraftkomponente in Bewegungsrichtung von der Vergrößerung nicht erfasst wird.

Andreas Trupp
andreas@andreastrupp.com

(29.02.2016; letztes Update: 28.11.2018)